handout per la conferenza

Strategie miste, minimax ed equilibri

Sala degli Specchi - Comune di Sanremo
28 febbraio 2003

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Matematica
Via Dodecaneso 35
16146 GENOVA
patrone@dima.unige.it

`http://www.dima.unige.it/~patrone`	homepage
`http://tdg.dima.unige.it`	web teaching
`http://www.citg.unige.it/citg.htm`	web server "CITG"
`http://www.scallywag.it`	web page del gruppo Scaλλywag

Nota preliminare: numeri che compaiono nelle varie tabelle etc. rappresentano “soldi” (euro, ad esempio). Il che è scorretto, ma è una approssimazione ragionevole per non parlare di funzioni di utilità.

Decisore singolo:

A	10
B	7
C	11

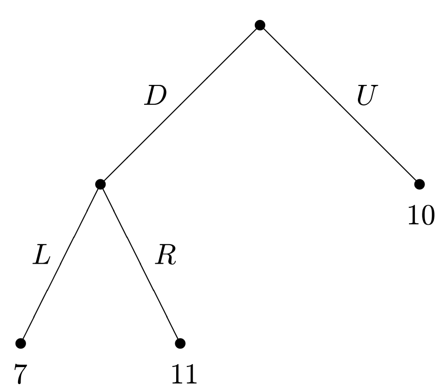
No problem, il decisore sceglie C.

Ci può essere indecisione/indifferenza:

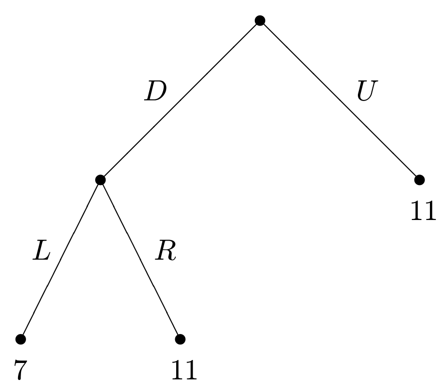
A	11
B	7
C	11

Per non fare la fine dell’asino di Buridano, possiamo usare le strategie miste per “risolvere l’indecisione”. Ma il loro ruolo è non essenziale.
Non solo, quale sia la probabilità con la quale si sceglie tra A e C è *irrilevante*.
Per ragioni varie è ragionevole assegnare la stessa probabilità ad A o a C, ma potremmo anche scegliere A con probabilità $1/6$ e C con probabilità $5/6$.

Decisioni strutturate temporalmente:



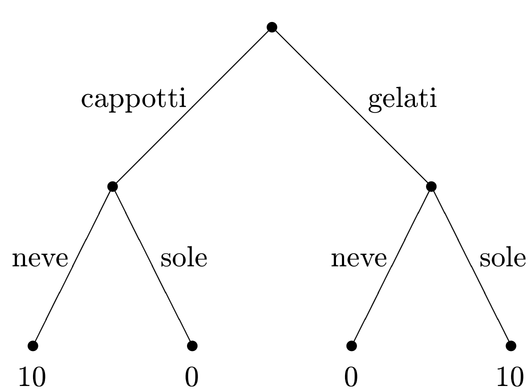
U	10
DL	7
DR	11



U	11
DL	7
DR	11

Non cambia nulla...

Un problema di investimento (nota: l'alberello andrebbe disegnato un po' diversamente, ma ci si può accontentare, purchè sia chiaro che "neve" e "sole" si riferiscono al tempo atmosferico nello stesso tempo e luogo):



Problema di scelta di portafoglio (Markowitz).
Tutto dipende da che tempo farà. C'è probabilità 1/2 che ci sia sole e 1/2 che ci sia neve...
Se una azienda fabbrica cappotti, per ogni 3 euro investiti guadagna 10 euro se viene la

neve (e quindi con probabilità 1/2) e guadagna 0 se ci sarà il sole (quindi, con probabilità 1/2).
A rovescio se fabbrica gelati.
Il decisore ha 6 lire da investire, e può investirle su mercato azionario, in azioni di fabbrica che produce gelati o in fabbrica che produce cappotti.
Problema di scelta di portafoglio, e di minimizzazione del rischio a parità di guadagno atteso.
Se investe 3 nel settore cappotti e 3 nel settore gelati, guadagna 5 *con certezza*!

E' questa una strategia *mista*? NO, è una strategia *pura* in un *continuo* di strategie (sceglie $\alpha \in [0, 1]$, cioè la composizione del portafoglio).
Si tratta di sfruttare la *correlazione* (soprattutto se negativa, come nel nostro esempio) esistente nell'andamento di titoli, per minimizzare il rischio.

Passiamo ai giochi.
Consideriamo il "pari/dispari":

$I \backslash II$	P	D
P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
D	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Ragionamento del giocatore I:

- se II gioca P, a me conviene giocare D
- se io gioco D, a II conviene giocare D
- se II gioca D, a me conviene giocare P
- se io gioco P, a II conviene giocare P
- se II gioca P, a me conviene giocare D
- ...

Siamo finiti dentro a un ciclo che si ripete.
Si ha un "regresso infinito", senza riuscire a trovare un "equilibrio".
Stessa identica situazione se è il giocatore II a fare i "ragionamenti".

Altro gioco:

$I \backslash II$	L	R
T	$(2,1)$	$(1,0)$
B	$(1,2)$	$(2,1)$

Ragionamento di I:

- se II gioca R, a me conviene giocare B
- se io gioco B, a II conviene giocare L
- se II gioca L, a me conviene giocare T
- se io gioco T, a II conviene giocare L
- se II gioca L, a me conviene giocare T
- ...

Stavolta abbiamo trovato un equilibrio: (T, L), almeno se seguiamo i "pensamenti" di I.
Analoga situazione per i ragionamenti di II

(T, L) è un equilibrio di Nash (vedi note del 15/1 per le definizioni).

Ultimo esempio di gioco:

$I \backslash II$	L	R
T	$(4,-4)$	$(1,-1)$
B	$(3,-3)$	$(2,-2)$

Si vede che, rifacendo gli stessi discorsi, (B, R) è equilibrio.
Osserviamo il fatto seguente (guardiamo il problema dal punto di vista di I):

$I \setminus II$	L	R	min delle righe ↓	
T	4	1	1	
B	3	2	2	← max dei min sulle righe
max delle colonne →	4	2		
		↑ min dei max sulle colonne		

Abbiamo che il *min dei max sulle colonne* è uguale al *max dei min sulle righe*!
E' un caso? No, se abbiamo un equilibrio, le strategie componenti sono di "maxmin" per I. Per quanto riguarda II, *ovviamente* vale lo stesso identico discorso; essendo il gioco a somma zero, le strategie di "maxmin" di II possono essere "viste" come strategie di "minmax" per I.
E' risultato generale sui giochi a somma zero.
Per giochi a somma qualsiasi, equilibrio (di Nash) può dare risultati diversi dall'uso di strategie di maxmin.
Vedasi l'esempio e l'esperimento

Resta un problema aperto: se abbiamo gioco senza equilibrio, come il "pari o dispari"?
Usiamo le strategie miste!
Teorema di von Neumann (1928) per i giochi a somma zero.
Teorema di Nash (1950) per i giochi non necessariamente a somma zero.

Interpretazioni interessanti delle strategie miste:

- bluff nel poker (vedi dopo...)
- calci di rigore (`http://www.econ.brown.edu/~iph/pdf/MinimaxIPH.pdf`)

Ecco le strategie miste in azione (in gioco a somma zero):

$I \backslash II$	L	R
U	$(-2,+2)$	$(+3,-3)$
D	$(+3,-3)$	$(-4,+4)$

Guadagno (ovvero: "payoff") atteso per I se I gioca $(p, 1-p)$ e II gioca $(q, 1-q)$:

$$-2pq + 3p(1-q) + 3(1-p)q - 4(1-p)(1-q) =$$
$$= p[-2q + 3 - 3q - 3q + 4 - 4q] + [3q - 4 + 4q] =$$
$$= p[7 - 12q] + [7q - 4]$$

$$7 - 12q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 7/12$$

Analogamente, si trova $p = 7/12$

		$q = 7/12$	$1 - q = 5/12$
	$I \backslash II$	L	R
$p = 7/12$	U	$(-2,+2)$	$(+3,-3)$
$1 - p = 5/12$	D	$(+3,-3)$	$(-4,+4)$

In equilibrio, abbiamo un guadagno atteso per I pari a:

$$(p[7-12q] + [7q-4])_{p=7/12, q=7/12} = \frac{7}{12} \cdot [7 - 12 \cdot \frac{7}{12}] + [7 \cdot \frac{7}{12} - 4] = \frac{49-48}{12} = \frac{1}{12}$$

Un programma in BASIC, che fissa per I la strategia mista ottimale e lascia al giocatore II la scelta di cosa giocare.

```
RANDOMIZE TIMER
' inizializzazione

'n e' una variabile usata per limitare il numero massimo di giocate possibili
n = 0

'g e' la variabile usata per indicare il guadagno del primo giocatore
g = 0

'si fissa la strategia mista ottimale per il giocatore I
p = 7 / 12

inizio:
'se si vuole che il giocatore II decida lui quante volte giocare,
'"scommentare" le righe seguenti
'INPUT "se vuoi finire, digita O (maiuscolo)"; k
'IF k = O THEN END

INPUT "metti la tua strategia: per L digita 1, per R digita 2"; s2
r = RND
IF r < p THEN s1 = 1 ELSE s1 = 2
'PRINT " r = "; r
'PRINT "s1 = "; s1
'PRINT " g = "; g
IF (s1 = 1 AND s2 = 1) THEN g = g + 2
'PRINT " dopo primo passo,   g = "; g
IF (s1 = 1 AND s2 = 2) THEN g = g - 3
'PRINT " dopo secondo passo, g = "; g
IF (s1 = 2 AND s2 = 1) THEN g = g - 3
'PRINT " dopo terzo passo,   g = "; g
IF (s1 = 2 AND s2 = 2) THEN g = g + 4
'PRINT " dopo quarto passo,  g = "; g

PRINT " mio guadagno = "; g

n = n + 1
'se si vuole che il giocatore II decida lui
'quante volte giocare, "commentare" la riga seguente
IF n > 120 THEN END

GOTO inizio
```

Vediamo, come detto, il bluff nel poker. Si tratta di un gioco di "poker" un po' semplificato...
L'esempio l'ho copiato pari pari da vecchie dispense (in inglese) di Stef Tijs. Ma lo si trova anche in un bel libro introduttivo alla TdG (in inglese) di Straffin.

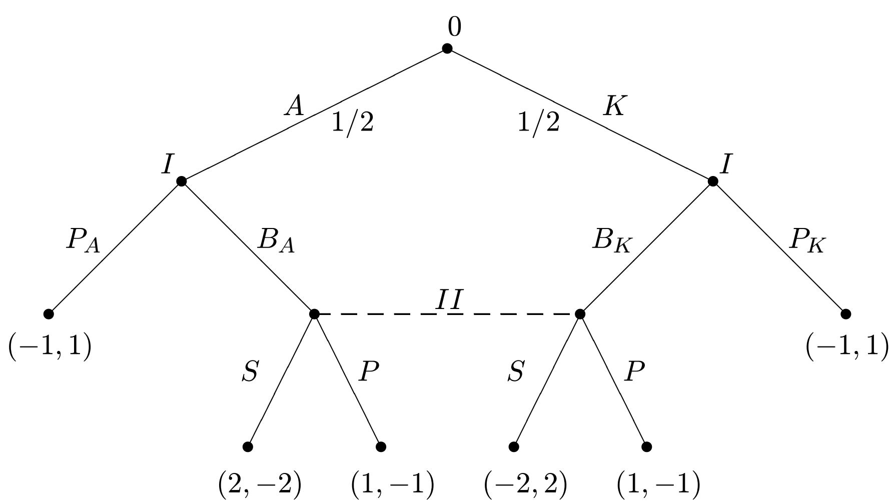
C'è un mazzo con sole due carte: A e K. A è la carta "alta" (cioè quella che vince) e K è la carta bassa.
Il mazzo viene accuratamente mescolato :-)
Il gioco inizia con I che estrae una carta dal mazzo coperto e la guarda. Può fare due cose:

- *passare* ("P"), nel qual caso lui deve dare 1 euro a II
- *rilanciare* ("B")

Se I ha passato, il gioco è finito. Se ha rilanciato, tocca a II, il quale può:

- *passare* ("P"), nel qual caso lui deve dare 1 euro a I
- *rilanciare* e *vedere* ("S"), nel qual caso il giocatore I deve mostrare la sua carta.
  - se I ha la carta "alta", cioè A, II deve dare 2 euro a I
  - se I ha la carta "bassa", cioè K, I deve dare 2 euro a II

Il gioco può essere rappresentato col seguente albero:



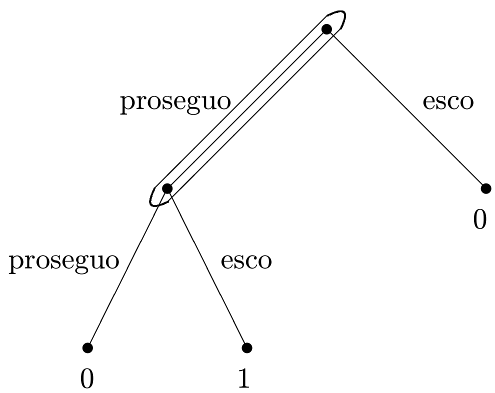
Il tratteggio serve a mettere in rilievo che II, quando fa la sua scelta, non sa la carta che ha in mano I.

Le strategie (cioè, i “piani d'azione” concepibili a priori) a disposizione di I sono quattro: $P_A P_K$, $P_A B_K$, $B_A P_K$, $B_A B_K$. Si noti che è stata fatta distinzione tra “P” quando il giocatore I ha in mano A (indicata come P_A) e “P” quando il giocatore I ha in mano K (indicata come P_K).
Data una strategia per I ed una strategia per II, possiamo determinare il payoff atteso dei due giocatori.
Ad esempio, data $B_A P_K$ per I e S per II,
- con probablità 1/2 I guadagna 2 e II guadagna -2
- con probablità 1/2 I guadagna -1 e II guadagna 1
Quindi, il guadagno atteso è:
- per I, $(1/2) \cdot 2 + (1/2) \cdot (-1) = 1/2$
- per II, $(1/2) \cdot (-2) + (1/2) \cdot 1 = -1/2$
Numeri che andiamo a mettere nella tabella seguente, nella cella che troviamo all'incrocio tra la riga “$B_A P_K$” e la colonna “S”.

		$q = 1/3$	$1 - q = 2/3$
	$I \backslash II$	P	S
$p_1 = 0$	$P_A P_K$	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$
$p_2 = 0$	$P_A B_K$	$(0, 0)$	$(-3/2, 3/2)$
$p_3 = 2/3$	$B_A P_K$	$(0, 0)$	$(1/2, -1/2)$
$p_4 = 1/3$	$B_A B_K$	$(1, -1)$	$(0, 0)$

NB: la strategia $B_A B_K$ prevede (per via di B_K) che il giocatore I bluffi. Si noti che la strategia ottimale per I prevede con probabilità positiva (1/3) che I adotti la strategia $B_A B_K$ e quindi che, quando lui ha la carte “bassa” (cioè K) bluffi mediamente 1/3 delle volte. Si noti che è ottimale per I bluffare con questa “frequenza”, né più spesso nè meno spesso!

Ma le strategie miste possono servire anche in caso di decisore singolo.
Gioco di Isbell (o “absent-minded (“drunk”?) driver”).
Deve uscire al *secondo* svincolo. Ma quando arriva allo svincolo, non ricorda se ne ha già passato uno oppure no.



Può usare solo 2 strategie:
- arrivato a uno svincolo, esco
- arrivato a uno svincolo, proseguo

Ma in ogni caso guadagna 0.
L'uso di strategie miste non aiuta.
Ma le strategie "comportamentali" sì!
Ogni volta che arrivo ad uno svincolo, lancio moneta: se esce testa, esco, sennò proseguo.
Guadagno atteso: 1/4.