Se voi volete andare in pellegrinaggio nel luogo dove è nata la nostra Costituzione, andate nelle montagne dove caddero i partigiani, nelle carceri dove furono imprigionati, nei campi dove furono impiccati. Dovunque è morto un Italiano per riscattare la libertà e la dignità, andate lì, o giovani, col pensiero, perché lì è nata la nostra Costituzione.

Piero Calamandrei: discorso ai giovani tenuto alla Società Umanitaria, Milano, 26 gennaio 1955.

Audio del discorso. La frase citata è al termine della terza parte.

Teoria dei giochi: antipasto e pasto frugale

Fioravante PATRONE[1]

[1]DIPTEM, Università degli Studi di Genova, *patrone@diptem.unige.it*

Riccione - 17-18 settembre 2010

Indice

Un interessante gioco a somma zero

I \ II	L		R	
T	−2	2	3	− 3
B	3	− 3	−4	4

Valore del gioco: 1/12

I gioca *T* con probabilità 7/12 e *B* con probabilità 5/12

Non profitable game

I \ II	L		C		R	
T	40	40	60	10	10	40
M	10	60	10	10	60	40
B	40	10	40	60	40	40

(T, L) è l'unico equilibrio di Nash.

Ma i giocatori "in carne ed ossa" scelgono rispettivamente B ed R.

Giochi cooperativi e non

Domanda: i giocatori possono sottoscrivere accordi vincolanti?

Risposte:

SI': allora abbiamo un gioco “cooperativo”.

NO: allora abbiamo un gioco “non cooperativo”.

Modelli principali:

Gioco in forma strategica (tipicamente per giochi non cooperativi)
Gioco in forma estesa (tipicamente per giochi non cooperativi)
Gioco in forma caratteristica (tipicamente per giochi cooperativi)

Gioco in forma strategica

Caso a due giocatori: $(\{I, II\}, X, Y, f, g)$

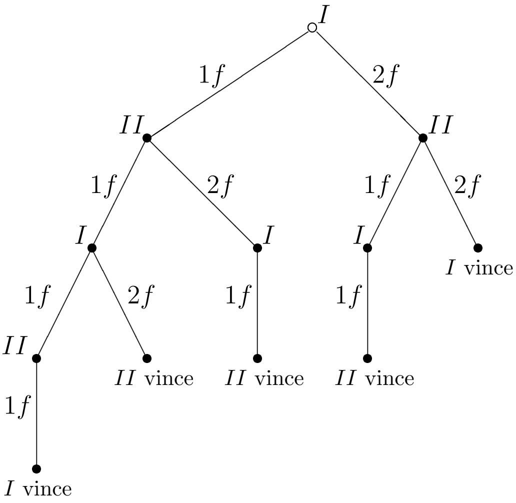
Dove:
- I e II sono i due giocatori
- X è l'insieme delle strategie disponibili per I, Y idem per II
- $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ è il payoff per I, g idem per II

Più semplicemente: (X, Y, f, g)

Un qualunque insieme finito N di giocatori:
$(N, (X_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N})$

Gioco in forma estesa

Un esempio è questo (è il "gioco dei fiammiferi", con solo due fiammiferi su solo due file).



Da forma estesa a forma strategica

Il giocatore I inizia e può scegliere tra $1f$ o $2f$. Ma non è obbligato a pensare localmente.

Sa che potrebbe capitargli di dover scegliere ancora. Pertanto, prima che il gioco inizi, può decidere quale strategia adottare.
Cioè, scegliere fra: $1f$ $1f$, $1f$ $2f$, $2f$ $1f$, $2f$ $2f$.
Similmente, II può scegliere tra: $1f$ $1f$, $1f$ $2f$, $2f$ $1f$, $2f$ $2f$ (i simboli sono gli stessi, ma il loro significato è differente: riguardano i fiammiferi tolti da II. Per pigrizia non ho usato simboli diversi!).

Il risultato interessante è che abbiamo un gioco in forma strategica.
O, meglio, quasi... Chi sono i payoff?

Facile: seguire il percorso individuato da una coppia di strategie: si arriva ad un nodo terminale e lì si legge l'esito (ed i conseguenti payoff: notare che nella figura della slide precedente non sono indicati i payoff ma gli esiti).

Nulla di nuovo...

Ogni gioco in forma estesa può essere convertito in un gioco in forma strategica, usando l'idea, non certo nuova, di strategia.
Osservazione: l'ipotesi che i giocatori siano intelligenti è essenziale!

Possiamo dire che la forma strategica è, in un certo senso, fondamentale (von Neumann, 1928). Per lo meno, per i giochi non cooperativi.

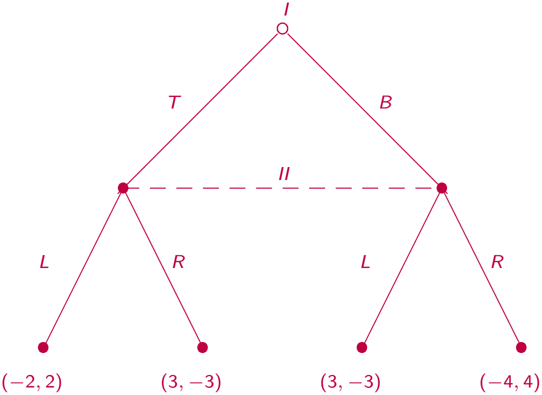
Non solo, possiamo usare un concetto "soluzione" sviluppato per un gioco in forma strategica (ad esempio, equilibrio di Nash) anche come soluzione per un gioco in forma estesa.

Sembra che sia tutto così facile...

Possiamo anche tornare indietro

Viceversa, ogni gioco in forma strategica può essere convertito in un gioco in forma estesa.

Ad esempio, il primo gioco può essere descritto mediante il seguente gioco in forma estesa:



L'unica novità è rappresentata dalla linea tratteggiata ("insieme di informazione"). Ci serve per dire che, quando tocca a *II*, questo giocatore non sa in quale dei due nodi (appartenenti allo stesso insieme di informazione) si trovi.

Induzione a ritroso

Possiamo facilmente “risolvere” il gioco dei fiammiferi.

Cominciamo dai “penultimi” nodi (quelli che sono seguiti solo da nodi terminali). Qui la scelta è facile, in quanto in questi nodi c’è un solo giocatore il quale ha tutto il potere in mano per determinare l’esito che preferisce (dato il fatto di trovarsi in quel nodo).
Fatto questo, guardiamo ai pre-penultimi nodi. Tenendo in conto le scelte che saranno fatte dai giocatori “seguenti”, la scelta dei giocatori in questi pre-penultimi nodi diventa anch’essa banale.
E così via, finché non raggiungiamo la radice dell’albero.
Questo metodo si chiama “induzione a ritroso” e funziona per un’ampia classe di giochi in forma estesa (per i cosiddetti giochi ad informazione perfetta).
Bene, otteniamo una coppia di strategie che a buon diritto può essere considerata una soluzione! E’ anche confortante sapere che questa coppia di strategie è un equilibrio di Nash (c’è un teorema che ce lo dice).

Equilibrio di Nash

Avendolo evocato, vediamo il concetto fondamentale di soluzione, per giochi in forma strategica.

(due giocatori) Dato $G = (X, Y, f, g)$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un equilibrio di Nash per G se:

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ per ogni $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$ per ogni $y \in Y$

Esistenza: teorema di Nash: strategie miste...
Difficoltà:
- non unicità
- alcuni equilibri di Nash non sono "sensati"
- inefficienza (Adam Smith aveva torto?)

Dilemma del prigioniero

$I \setminus II$	L	R
T	3 3	1 4
B	4 1	2 2

B ed R sono strategie dominanti (per I e II rispettivamente).
Quindi abbiamo una soluzione. Carino e semplice.

Ma... **l'esito è inefficiente!**
Entrambi i giocatori preferiscono l'esito derivante da (T, L).

Embé? Il problema è che i giocatori sono (assunti essere) razionali e intelligenti.

Battaglia dei sessi, coordinamento

Esempio (battaglia dei sessi, BoS): $(T, L), (B, R)$ sono equilibri di Nash. Non unico, in modo essenziale

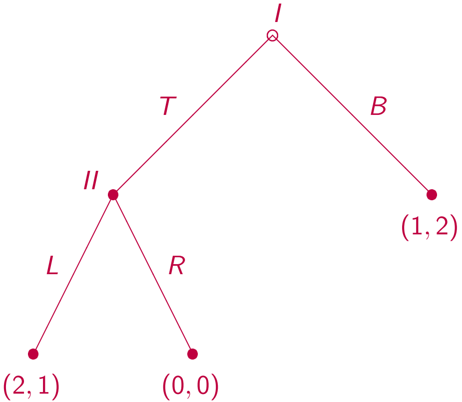
$I \backslash II$	L	R
T	2 1	0 0
B	0 0	1 2

Esempio (gioco di coordinamento): $(T, L), (B, R)$ sono equilibri di Nash. Non unico, in modo essenziale

$I \backslash II$	L	R
T	1 1	0 0
B	0 0	1 1

A small problem

Vediamo un gioco in forma estesa, piccolo piccolo:



Forma strategica:

I \ II	L	R
T	2 1	0 0
B	1 2	1 2

L'induzione a ritroso ci da (T, L). Ma la forma strategica ha due equilibri di Nash: (T, L) and (B, R)!

Riferimenti e pubblicità

Riferimenti:

Un libro:
Decisori (razionali) interagenti
Edizioni Plus, Pisa, 2006.

Un sito:
http://dri.diptem.unige.it

Un paio di note introduttive:
http://www.diptem.unige.it/patrone/intro_TdG.pdf
http://www.diptem.unige.it/patrone/TU_games.pdf

Pubblicità:

http://www.scuderialabellaria.it
e:
urang-utang©