handout per la conferenza

Teoria dei giochi e biologia molecolare

Liceo "Giovanni Da Vigo", Rapallo
27 maggio 2005

A Stefano:
Nemo propheta in patria.

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Matematica
Via Dodecaneso 35
16146 GENOVA
patrone@dima.unige.it

http://www.dima.unige.it/~patrone	homepage
http://tdg.dima.unige.it	web teaching
http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
http://www.scallywag.it	web page del gruppo Sca$\lambda\lambda$ywag

Giovanni da Vigo (1450-1525), precursore di Vesalio, archiatra del papa Giulio II:
"lo cancro in le mammelle per altra via non riceve cura se non tajando tutto lo membro con la infirmitade"

Abstract
Lo studio del comportamento dei partecipanti ad un gioco, inteso come modello per affrontare un problema di interazioni socio-economiche, può trovare applicazioni in contesti apparentemente molto lontani, come l'indagine sulla rilevanza dei singoli geni nell'insorgenza di malattie genetiche.

Handout

• La TdG nasce 60 anni fa, nel 1944: "Theory of Games and Economic Behavior", di J. von Neumann e O. Morgenstern.

• Distinzione fra giochi cooperativi e non-cooperativi: se si possono oppure no sottoscrivere accordi vincolanti.

• Vedi note in rete:
`http://www.dima.unige.it/~patrone/divulgazione-pat.htm`
In particolare le note sui giochi non cooperativi e cooperativi.

• Giochi cooperativi, anzi: TU-games.
Abbiamo insieme di giocatori N e, per ogni S, sottoinsieme di N, è dato $v(S) \in \mathbb{R}$. Potrebbe essere quanto S riesce ad ottenere se i suoi membri "mettono in comune" le loro risorse, abilità, etc.

• Un esempio (per altri esempi, vedi i file disponibili in rete):
Esempio Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo 1, 2, 3. Si ha:
$v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1,2) = v(1,3) = 4$; $v(2,3) = 6$; $v(1,2,3) = 20$
Consideriamo anche un altro gioco, w, che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori:
$w(1) = w(2) = w(3) = 0$; $w(2,3) = w(1,3) = 4$; $w(1,2) = 6$; $w(1,2,3) = 20$.

Osservazione sulle notazioni: in questo esempio abbiamo usato notazioni scorrette. Dovremmo scrivere $v(\{1\})$ invece di $v(1)$, $v(\{1,2\})$ invece di $v(1,2)$, ecc. Ma in TdG tutti fanno così, perchè è così noioso scrivere tutte quelle parentesi graffe...

• Condizione significativa: la superadditività:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \quad \text{se} \quad S \cap T = \emptyset$$

Se il gioco è superadditivo, conviene mettersi tutti assieme per ottenere $v(N)$ che è il miglior risultato possibile.

• Ma non è finita qui:
Come dividere il "bottino"?
Per quanto detto ci limitiamo a considerare una allocazione $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Il significato è che x_i dice quanto "tocca" al giocatore i

• Una tabella sinottica:

PRINCIPI	CONDIZIONI
realismo	$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq v(N)$ (*)
incentivi alla partecipazione	$x_i \geq v(i)$ (**) $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, $(\star)$ caso particolare $\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)$ (***)
giustizia, fairness	simmetria, anonimità
a ognuno secondo i suoi meriti...	ciò che uno ottiene è positivamente correlato coi suoi contributi (marginali?)

• la nomenclatura di base:
(*) e (***): pre-imputazione
(*) e (***) e (**): imputazione
(*) e (***) e (**) ed inoltre $(\star)$: allocazione nel *nucleo*

• property driven solution: valore Shapley: simmetria (giustizia), null player property (a ognuno secondo i suoi meriti...), pre-imputazione (realismo e incentivo alla partecipazione), additività (??? comoda proprietà matematica?)

• il valore Shapley non è altro che la media dei contributi marginali:

$$\Phi_i(v) = (\frac{1}{n!}) \sum_{\sigma} m_i^{\sigma}(v) \text{ per ogni } i \in N$$

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vogliono dire σ e m_i^{σ}... Per una giustificazione generale, vedi note in rete.
Vediamo un esempio. Consideriamo il gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ con v funzione caratteristica tale che:
$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = 1$;
$v(1, 2) = 9$, $v(2, 3) = 5$, $v(1, 3) = 6$, $v(1, 2, 3) = 12$
Per calcolare il valore Shapley, costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna intestata con i mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia 3!), vale a dire il valore Shapley.

permutazione	1	2	3
123	0	9	3
132	0	6	6
213	9	0	3
231	7	0	5
312	5	6	1
321	7	4	1
totale	28	25	19
valore Shapley	28/6	25/6	19/6

(Nota: Si può osservare che $\phi_1(v) + \phi_2(v) = 28/6 + 25/6 = 53/6 < 54/6 = 9 = v(\{1,2\})$ e quindi il valore Shapley non sta nel nucleo).

• Applicazione: analisi genetica
- geni, microarray
- differenzialmente espressi
- matrice di 0,1
- principio di causalità
- valore Shapley (NB: "property driven", con proprietà adeguate al contesto!)
- risultati sperimentali: vedi le pagine allegate