handout per la conferenza

Equilibri di Nash? Mah...

Liceo Scientifico Lanfranconi - Genova Voltri
12 marzo 2004

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Matematica
Via Dodecaneso 35
16146 GENOVA
patrone@dima.unige.it

http://www.dima.unige.it/~patrone	homepage
http://tdg.dima.unige.it	web teaching
http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
http://www.scallywag.it	web page del gruppo Sca$\lambda\lambda$ywag

3 agosto 44
l'amico Antonio è accreditato presso il Comando regionale Liguria per il collegamento radio con il Comando generale, sia per informazioni urgenti di suo interesse, sia per notizie importanti relative all'attività patrioti
Maurizio

1 Breve introduzione alla teoria dei giochi

Un problema di decisione nel quale è coinvolto più di un decisore può presentare molte varianti: ne consegue che sono molti i modelli utilizzati per trattare questo problema; sono anche molte le classificazioni che si usano, a seconda della presenza o meno di alcune caratteristiche. La suddivisione fondamentale è data dalla risposta alla domanda seguente:

> vi è oppure no la possibilità per i giocatori di sottoscrivere
> accordi vincolanti?

Se non c'è, allora si parla di giochi *non cooperativi.* Quando invece i giocatori hanno questa possibilità allora si usa il termine giochi *cooperativi.* Si badi bene che questi termini NON HANNO NULLA A CHE FARE col significato consueto del termine "cooperativo", così come viene utilizzato nel linguaggio comune. Quando si studia un gioco "cooperativo", non vuol dire che si ha a che fare con decisori (detti normalmente "giocatori") più buoni o più ben disposti a cooperare che quando si ha a che fare con una situazione di gioco classificato come non cooperativo. La differenza sta solo ed esclusivamente in ciò che ho detto prima: si possono sottoscrivere oppure no accordi vincolanti?

Vi sono poi molte altre distinzioni da fare: sul modo più o meno dettagliato in cui vengono descritti (si parla di forma estesa o forma strategica), sulla ammissibilità o meno dei cosiddetti "pagamenti laterali", sul fatto che il gioco sia a somma zero oppure no, etc.

Io mi limiterò a parlare brevemente dei soli giochi non cooperativi, a due giocatori, in forma strategica (detta anche forma normale) ed in forma estesa (per i quali non darò però alcuna definizione formalizzata).

Una delle stituazioni più semplici possibili di interazione strategica si ha quando sono coinvolti due giocatori (chiamiamoli Davide e Marta, per fissare le idee), ognuno dei quali ha a disposizione solo due alternative tra le quali scegliere. Possiamo immaginare che costoro giochino ad una delle tante versioni del "pari o dispari": ciascuno ha un euro, e deve mostrare "testa" o "croce". E' assolutamente essenziale che le monete vengano mostrate dai due giocatori contemporaneamente (ma da Davide e Marta non ci aspettiamo che cerchino di imbrogliare). Se entrambe le monete mostrano la stessa faccia, queste andranno a Marta, che pertanto guadagna un euro, a scapito di Davide. Se invece sono una testa ed una croce, è Davide a guadagnare un euro. Possiamo riassumere tutto ciò in una tabella, la cui comprensione dovrebbe essere agevole:

Davide \ *Marta*	Testa	Croce
Testa	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
Croce	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Vediamo in dettaglio come leggere la tabella, legandola alla descrizione verbale del gioco data prima.

Le righe stanno a indicare le scelte possibili di Davide (cioè: è come se Davide dovesse scegliere tra la riga "testa" o quella "croce"). Analogamente le colonne rappresentano le scelte a disposizione di Marta. I numeri che compaiono nelle caselle interne rappresentano i guadagni (in termini relativi) dei nostri due giocatori. Ad esempio, se Davide sceglie "croce" e Marta sceglie "testa", andiamo a vedere cosa si trova nella casella all'incrocio tra la riga "croce" e la colonna "testa": troviamo $(1, -1)$. Il primo numero (quello prima della virgola) ci dice quale è il guadagno di Davide (cioè 1), mentre il secondo ci dice quello di Marta (cioè -1, vale a dire che Marta perde un euro).

A questo punto non dovrebbe essere sorprendente la definizione seguente. La vedremo in modo molto formale, provando poi a fare "il cammino inverso", per vedere come si possa tradurre in una situazione concreta, per quanto stilizzata.

Definizione (di gioco in forma strategica, a due giocatori)
E' $G = (X, Y, f, g)$, dove:

X, Y sono insiemi non vuoti
$f, g : X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$

Interpretazione. X, Y sono gli insiemi delle strategie, rispettivamente per il giocatore I ed il giocatore II. Per f, g l'interpretazione è più delicata. Per averne un'idea corretta occorrerebbe aprire una parentesi non breve sulla teoria dell'utilità. Ci possiamo accontentare di una *prima approssimazione molto grossolana*. Vale a dire, possiamo dire che esprimano i *guadagni monetari* dei due giocatori (f ci dice i guadagni di I, mentre la funzione g ci dà quelli di II). Questo presuppone che i giocatori adottino come criterio di valutazione quello del guadagno atteso, cosa che non solo non è sempre vera, ma a volte *non ha neanche senso* (l'esito di un gioco molte volte non è un guadagno monetario).

Esempio. $X = \{T, B\}$, $Y = \{L, R\}$;

$$f(T, L) = 1,\ f(T, R) = 2,\ f(B, L) = 2,\ f(B, R) = 1$$

$$g(T, L) = -1,\ g(T, R) = 1,\ g(B, L) = 3,\ g(B, R) = 4$$

Cosa vogliamo dire? Che I ha a disposizione due strategie: T e B. Analogamente, II può scegliere tra L o R. Se ammettiamo che i guadagni siano espressi in euro, quando scriviamo, ad esempio, che $f(B, L) = 2$, intendiamo dire che il guadagno per il giocatore I è di 2 euro, se il giocatore I sceglie B e il giocatore II sceglie L. Invece, $g(B, L) = 3$ ci dice che il guadagno per il giocatore II è pari a 3 euro, sempre nel caso in cui I scelga B e il giocatore II scelga L. Naturalmente quando parliamo di guadagni pensiamo sempre a questi guadagni in termini relativi. Per cui, il fatto che $g(T, L) = -1$ significa che II perde 1 euro.

Un modo molto comune ed utile per rappresentare un gioco come questo è quello che già abbiamo visto, cioè utilizzare una tabella come la seguente:

$I \backslash II$	L	R
T	$(1, -1)$	$(2, 1)$
B	$*(2, 3)*$	$(1, 4)$

La coppia messa in evidenza con gli asterischi è la coppia $(f(B, L), g(B, L))$.

E' evidente che questa rappresentazione può essere adottata per ogni gioco in cui X ed Y siano insiemi finiti. Per questa ragione, i giochi finiti si dicono a volte giochi “bimatrice”: si fa naturalmente riferimento al fatto che la tabella come quella sopra indicata può essere costruita “accorpando” due matrici: una ci dà i “guadagni” del giocatore I, l'altra ci dà quelli del giocatore II. Nel nostro caso, avremmo:

I	L	R
T	1	2
B	2	1

II	L	R
T	-1	1
B	3	4

Ma quale è la *soluzione* di un gioco? L'idea più accreditata di soluzione è quella di equilibrio.

Per comprendere come mai si dia la definizione che seguirà è importante precisare un aspetto di carattere interpretativo. Quando un gioco viene descritto mediante la “forma strategica”, come abbiamo fatto qui, si assume che i giocatori debbano scegliere le loro strategie contemporaneamente. Pù precisamente, I dovrà scegliere la sua strategia senza sapere la scelta di II; analogo discorso vale per II. Concretamente, si può immaginare che, al momento di effettuare la sua scelta, I si trovi in una stanza e II in un'altra, isolata da quella di I. Volendo continuare in questa “rappresentazione”, possiamo pensare che, una volta dentro le loro stanze, i giocatori abbiano davanti a loro tanti bottoni quante sono le strategie a loro disposizione, e mettano in atto la strategia da loro scelta premendo il pulsante corrispondente: dopo di che un qualche marchingegno produrrà il risultato che consegue dalle scelte che loro hanno fatto. Nell'esempio, I si troverebbe davanti i due pulsanti T e B, mentre II avrebbe i pulsanti L ed R. Se I schiaccia B e II schiaccia L, un macchinario fornirà ad I 2 euro, mentre darà a II 3 euro.

Definizione di equilibrio. Sia dato il gioco $G = (X, Y, f, g)$. Diremo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un equilibrio per G se:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{1}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{2}$$

Interpretazione. Alla base di questa definizione vi sono alcuni presupposti. Per capirli, dobbiamo però *precisare* l'interpretazione che avevamo dato di G. Cioè, I sceglie quale strategia usare nell'ambito delle strategie che ha a disposizione: ovverossia, sceglie un elemento $x \in X$. Analogamente, II sceglie $y \in Y$. La cosa importante da pensare è che i due giocatori effettuino le loro scelte contemporaneamente ed indipendentemente. Di più: se intendiamo trattare una situazione di gioco non cooperativo, dobbiamo tenere presente che i giocatori non possono effettuare tra di loro degli accordi *vincolanti.* Se aggiungiamo queste specificazioni, la seguente storiella diventa plausibile. Immaginiamo che i due giocatori si mettano d'accordo per giocare, l'uno la strategia $\bar{x}$ e l'altro la strategia $\bar{y}$. Se vogliamo che questo accordo sia un minimo sensato, sembra ragionevole richiedere che resista a considerazioni del tipo seguente (il giocatore I riflette):

> Bene, ci siamo accordati per giocare in quel modo: visto che se violo l'accordo non mi succede nulla, vediamo un po' se posso far di meglio anziché giocare la $\bar{x}$ che si era detto. Le possibilità sono due: o l'altro giocatore non rispetta l'accordo, ed è allora inutile tenerne conto, oppure lo rispetta. In questo secondo caso, vediamo un po' se non c'è un'altra strategia x per cui $f(x, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$

La definizione di equilibrio è strutturata proprio in modo da recepire queste considerazioni: le condizioni (1) e (2) dicono proprio che nessuno dei due giocatori ha convenienza a deviare dalla strategia che gli è "prescritta" dall'equilibrio, *fermo restando che neppure l'altro giocatore "devii"'.*

Di solito, quando si parla di equilibri, si usa chiamarli equilibri di Nash o di Cournot-Nash. La ragione è la seguente:

- Nash nel 1950 prova un importante teorema il quale garantisce l'esistenza di un equilibrio per una classe molto ampia ed importante di giochi, estendendo al caso generale il precedente risultato di von Neumann, che l'aveva ottenuto nel 1928 per i giochi a somma zero (cioè quelli per cui $f(x, y) + g(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$).
- Cournot nel 1838 aveva "anticipato" la TdG adottando, come "soluzione" per un modello di oligopolio, proprio questa idea di equilibrio.

Vediamo un po' di esempi:

Esempio 1. Nell'esempio presentato dopo la definizione formale di gioco, la coppia (T,R) è un equilibrio di Nash, come si può verificare direttamente dalla bimatrice.

Esempio 2. Questo è il gioco più famoso: si tratta del "dilemma del prigioniero":

$I \backslash II$	NC	C
NC	$(4, 4)$	$(0, 5)$
C	$(5, 0)$	$(1, 1)$

Si vede che l'equilibrio di questo gioco è dato dalla coppia di strategie (C, C). La cosa poco gradevole è che *entrambi i giocatori* preferirebbero l'esito derivante dalla coppia di strategie (NC, NC).

La ragione per cui questo gioco viene chiamato "dilemma del prigioniero" risale ad una storia inventata tanto tempo fa per illustrare la teoria dei giochi ad una conferenza per non specialisti... La storiella è la seguente. Due individui vengono arrestati dalla polizia e chiusi in celle separate. I due individui sono sospettati di aver compiuto un crimine (una rapina, ad esempio) che, se provato, comporta una pena di 5 anni. La polizia ha le prove per farli condannare a 1 anno per un crimine lieve (ricettazione, porto abusivo d'arma...), per cui promette che se uno confesserà e l'altro no, chi avrà confessato sarà libero. Ovviamente, se entrambi confessano, verranno condannati (ma ad una pena un poco più lieve, data la loro collaborazione: 4 anni). Il significato dei numeri nelle caselle è in tal caso non "soldi", bensì numero di anni di sconto di pena (rispetto alla condanna più grave).

Esempio 3. Anche questo è un gioco famoso: si tratta della "battaglia dei sessi":

$I \backslash II$	T	B
T	$(2,1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(1,2)$

Qui di equilibri ce ne sono due: (T,T) e (B,B). Il guaio è che:

> O i due tizi hanno la possibilità di parlarsi prima e di concordare una coppia di strategie. Fermo restando che sia una coppia di strategie di equilibrio, quale delle due sceglieranno? I preferisce l'equilibrio (T,T), mentre II preferisce l'equilibrio (B,B).
>
> Oppure i due giocatori non hanno questa possibilità e devono scegliere quale strategia giocare "al buio". In questo caso, non è facile capire come giocare. Perché I potrebbe decidere di giocare T, in quanto mira all'equilibrio che gli dà il maggior guadagno. Per le stesse identiche ragioni II potrebbe decidere di giocare R. Risultato: entrambi guadagnano 0, anziché il 2 sperato.

La storiella che in questo caso dà il nome al gioco riguarda la scelta se andare a teatro o all'incontro di boxe. Potete immaginare marito e moglie: la moglie preferisce il teatro (T) e il marito la boxe (B). Ma in ogni caso preferiscono essere assieme anzichè in due posti diversi. Completa la storiella il fatto che non sono riusciti a mettersi d'accordo prima e non sono in grado di comunicare tra loro (era pre-cellulari...).

Esempio 4. Il gioco seguente è interessante par varie ragioni: è un esempio di gioco a somma zero; descrive un gioco molto familiare (pari o dispari); peccato che *non abbia equilibri.* Si tratta del gioco che abbiamo introdotto all'inizio di questi appunti:

$I \backslash II$	P	D
P	$(-1,1)$	$(1,-1)$
D	$(1,-1)$	$(-1,1)$

Di solito il gioco che abbiamo descritto all'inizio (con Marta e Davide), viene detto in inglese "matching pennies". Se vogliamo giustificare il nome "pari o dispari", si può immaginare il gioco seguente: i due giocatori hanno ciascuno davanti due carte coperte, una numerata con un numero pari e l'altra con un numero dispari. Devono scoprire le carte simultaneamente e la matrice sopra illustra i guadagni (e perdite) dei due giocatori.

L'ultimo esempio pone un problema molto importante da risolvere. Se si vuole accreditare l'equilibrio di Nash come idea di soluzione, occorrerà sincerarsi che almeno giochi semplici come quello di "pari o dispari" abbiano almeno un equilibrio. Come si fa? La chiave per la soluzione sta nell'idea di *strategia mista*, dovuta a Borel e a von Neumann. Nel teorema del 1928 già citato, von Neumann dimostra che ogni gioco finito (cioè con X, Y insiemi finiti) a somma zero (cioè t.c. $f(x,y) + g(x,y) = 0$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$)

ha equilibrio (ovverossia, la funzione f ha un punto di sella) in strategie *miste*. Tale risultato viene poi esteso nel 1950 da Nash, senza più richiedere la condizione che il gioco sia a somma zero.

Ma cosa sono le strategie miste? E' facile da spiegare, ma occorre un poco di confidenza col calcolo delle probabilità elementare. Supponiamo per semplicità che X, Y siano insiemi finiti. Anzi, per far prima, che sia $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ed $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Ebbene, una strategia mista per il giocatore I non è altro che una *distribuzione di probabilità* su X. Ovverossia, una strategia mista per I non sarà altro che una m-pla di numeri reali $(p_1, \ldots, p_m)$ il cui significato è il seguente: I gioca la strategia x_1 con probabilità p_1, ... , la strategia x_m con probabilità p_m. Un po' più concretamente, supponiamo che sia $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Una strategia mista per I potrebbe essere, per esempio $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1/2, 0, 1/6, 1/3)$. Ed il giocatore I per giocarla potrebbe fare così: lancia un dado: se esce uno delle facce coi numeri $1, 2, 3$, lui gioca x_1, se esce 4 gioca x_3, se esce 5 o 6 gioca x_4.

In generale, cosa succede se i giocatori giocano una coppia di strategie miste? Se giocano $(p_1, \ldots, p_m)$ e $(q_1, \ldots, q_n)$, vorrà dire che la probabilità che venga giocata la coppia di strategie pure x_i, y_j è $p_i q_j$ (si noti che assumiamo che le "estrazioni a sorte" previste dalle strategie miste vengano effettuate dai due giocatori in modo indipendente). In questo modo si può calcolare il guadagno atteso che sarà (per I e II rispettivamente):

$$\sum_{i,j} p_i q_j f(x_i, y_j) \qquad\qquad \sum_{i,j} p_i q_j g(x_i, y_j)$$

Il lettore è invitato a verificare che le espressioni precedenti non sono altro che il *guadagno atteso* dei due giocatori.

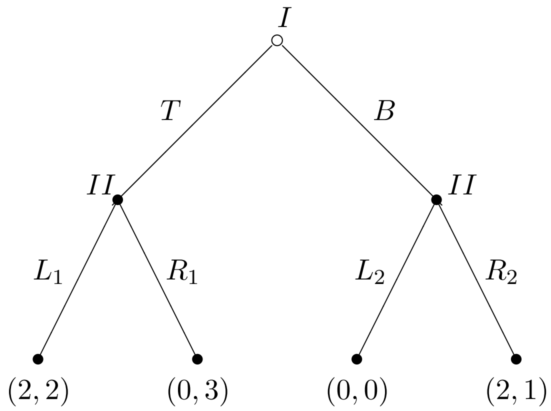
Nell'esempio 4, abbiamo un equilibrio di Nash in strategie miste: si tratta della coppia di strategie $((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$. Si invita il lettore a verificarlo, ed anche a provare che si tratta dell'unico equilibrio di questo gioco.

Già che ci siamo, osservo che il gioco dell'esempio 3 ha un *terzo* equilibrio in strategie miste che è dato da: $(2/3, 1/3), (1/3, 2/3)$. Chi abbia voglia di fare i conti necessari, potrà verificare come questo equilibrio offra ad entrambi i giocatori un guadagno atteso inferiore a quello "offerto" dagli equilibri trovati prima.

Come avevo detto all'inizio, farò anche cenno ai giochi in forma estesa, anche perché è esperienza comune il fatto che l'interazione strategica possa svolgersi nel tempo. Limitarsi ad illustrare la sola forma strategica potrebbe dare l'impressione scorretta che la teoria dei giochi affronti solo casi molto particolari.

Un gioco in forma estesa consiste sostanzialmente nell'idea di estendere a due giocatori lo strumento dell'albero delle decisioni, usato spesso nei problemi di decisione individuale.

Un esempio è il seguente:



Col disegno precedente, intendiamo dire che in questo gioco tocca muovere prima a I e poi a II. E abbiamo anche indicato quali sono le alternative a disposizione dei due giocatori in ogni circostanza.

Uno dei contributi più importanti di von Neumann, già nel suo contributo del 1928, è stato mostrare come in realtà un gioco in forma estesa possa essere trasformato in un gioco in forma strategica. Basta definire in modo conveniente cosa siano le strategie a disposizione dei giocatori. In effetti non è molto difficile immaginare cosa sia una strategia: basta pensare al significato usuale di questa parola. Si tratta di supporre che ogni giocatore analizzi il gioco prima di giocare: evidentemente, visto che l'andamento del gioco non dipenderà solo dalle sue decisioni, egli dovrà valutare tutte le alternative a sua disposizione in ogni possibile circostanza, se vorrà prendere una decisione ragionata.

Nell'esempio fatto, il giocatore I ha poco da stare a pensare: evidentemente lui ha due strategie a disposizione: T oppure B. Invece il giocatore II ha a disposizione **quattro** strategie: $L_1L_2; L_1R_2; R_1L_2; R_1R_2$. Spero che le poche parole dette sopra siano state sufficienti per far capire come mai il giocatore II ha a disposizione le quattro strategie sopra indicate: mentre analizza il gioco, egli non sa le scelte che poi effettuerà davvero il giocatore I. Per cui, egli deve pensare a cosa farà sia nel caso in cui I scelga T, sia nell'altro caso. Si potrebbe dire (e sarebbe giusto, tra l'altro), che egli deve indicare, per ogni vertice di sua "pertinenza" (cioè che porta vicino l'etichetta II) quale scelta pensa di fare tra le alternative che ha a sua disposizione.

Insomma, la forma strategica del gioco precedente è:

$I \backslash II$	$\mathrm{L_1\ L_2}$	$\mathrm{L_1\ R_2}$	$\mathrm{R_1\ L_2}$	$\mathrm{R_1\ R_2}$
T	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(0, 3)$	$(0, 3)$
B	$(0, 0)$	$(2, 1)$	$(0, 0)$	$(2, 1)$

Si verifica facilmente che $(B, L_1R_2), (B, R_1R_2), (T, R_1L_2)$ sono equilibri per questo gioco.

La possibilità di "ridurre" la descrizione di ogni gioco (per quanto complicato) dalla forma estesa alla forma strategica, congiunta alla affermazione che *in questo processo di* *riduzione non si perde nulla di essenziale*, se si assume che i giocatori siano perfettamente razionali ed intelligenti, è uno dei capisaldi[1] della teoria dei giochi come venne "creata" nel 1944 da von Neumann e Morgenstern.

Approfitto dell'occasione per ricordare che la TdG nasce con la pubblicazione del libro *"Theory of games and economic behavior"* dei due citati autori. In questo libro venne affermata con forza l'idea che l'economia (e le scienze sociali in genere) avesse bisogno di una nuova teoria matematica per descrivere e affrontare i problemi di interazione strategica: era evidente infatti che né l'analisi matematica, né l'algebra o la geometria erano in grado di fornire gli strumenti necessari a tale scopo. Questo libro ebbe un fortissimo impatto e suscitò enormi attese; dopo alcuni anni di successo, subentrò però un senso di disillusione e sfiducia nella teoria dei giochi, disciplina che poi invece diventa strumento insostituibile per l'analisi economica a partire dagli anni '80.

Ritornando ai giochi in forma estesa, penso che sia evidente che ci sono giochi più complicati di quello sopra descritto. Le complicazioni che dobbiamo affrontare, se non vogliamo restringere troppo l'ambito dell'analisi, sono due:

- come descrivere l'intervento del caso in un gioco (per esempio quando si mescolano le carte prima di darle, o quando si lanciano dadi)
- come descrivere mosse *contemporanee*

Cominciamo col secondo aspetto, che è anche il meno "ovvio". Prima di descrivere la soluzione che si adotta a livello formale, proverò a fare un discorso che spero possa essere convincente.

Prendiamo in esame un gioco come quello del "pari o dispari". Un ingrediente essenziale del gioco, se giocato correttamente, è quello che i due giocatori "mostrino" le dita contemporaneamente. Ebbene, immaginiamo che il gioco sia invece giocato così. I due giocatori si trovano in due stanze separate; il primo sceglie tra P e D e comunica la sua scelta ad un "arbitro" del tutto imparziale ed attendibile. Poi l'arbitro va nella stanza dove si trova il giocatore II e chiede anche a costui di scegliere tra P e D, ovviamente senza dirgli quale è stata la scelta fatta dal giocatore I. E poi si va a vedere chi ha vinto secondo le regole solite del "pari o dispari".

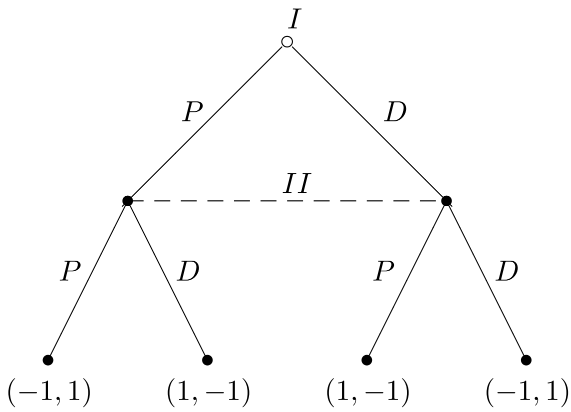
Forse che c'è una differenza sostanziale tra il modo solito di giocare e questo? Intendo dire dal punto di vista "strategico". Non direi. In ogni caso, quel che emerge è che forse non è tanto importante la contemporaneità per così dire "temporale" delle mosse, quanto *lo stato di informazione di un giocatore quando deve fare la sua mossa.*

Occorre quindi trovare un trucco che ci permetta di tenere conto di questo nuovo ingrediente, cioè dell stato di informazione dei giocatori. Il trucco consiste nel raggruppare insieme tutti i vertici di un albero che hanno la seguente proprietà:

> un giocatore, quando si trova in uno di questi vertici, non è in grado di sapere se lui si trovi effettivamente in **quel** vertice e non in un altro

[1]Questa idea verrà messa in discussione da Selten, che introduce nel 1965 l'idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi, nozione che utilizza direttamente la forma estesa del gioco

Vediamo subito cosa succede col gioco del "pari o dispari". L'albero lo descriviamo così:



Come si vede, due nodi dell'albero sono stati uniti da una linea tratteggiata, il cui significato spero possa essere chiaro: sta ad indicare che il giocatore II, quando deve effettuare le sue scelte, non sa se si trova nel vertice di sinistra o di destra: infatti, non sa cosa ha scelto il giocatore I.

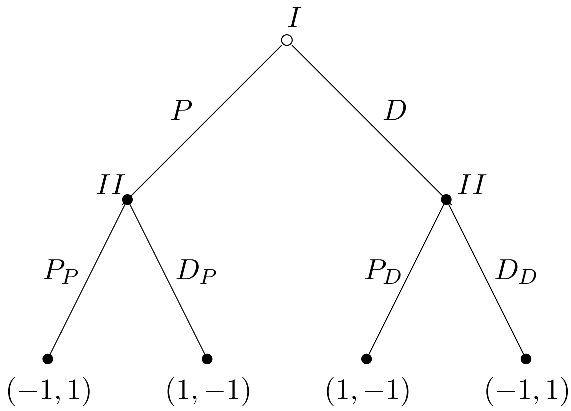
Si noti che ho etichettato con la stessa etichetta P due rami dell'albero, uscenti dallo stesso insieme di informazione di II, ma da vertici diversi. Il significato è questo: II può indicare o P o D all'arbitro. Ma non sapendo che cosa abbia dichiarato il primo giocatore, non può certo pensare di condizionare la sua scelta sulla base della scelta di I, pur se essa è avvenuta. Morale: in questo caso II ha a sua disposizione **DUE** strategie, diversamente dal gioco precedentemente descritto in forma estesa, dove invece le strategie a sua disposizione erano quattro. La forma normale diventa quindi:

$I \backslash II$	P	D
P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
D	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Evviva! abbiamo ritrovato esattamente la forma estesa del gioco del pari o dispari, come nell'esempio 4. E senza trucchi e senza inganni. O no?

Per cercare di mettere in evidenza l'importanza che riveste l'informazione a disposizione di un giocatore al momento in cui deve effettuare la scelta, vediamo il caso in cui, nel "pari o dispari" la scelta del primo giocatore venisse comunicata al secondo.

Tanto per cominciare, la descrizione del gioco in "forma estesa" sarebbe ora la seguente:

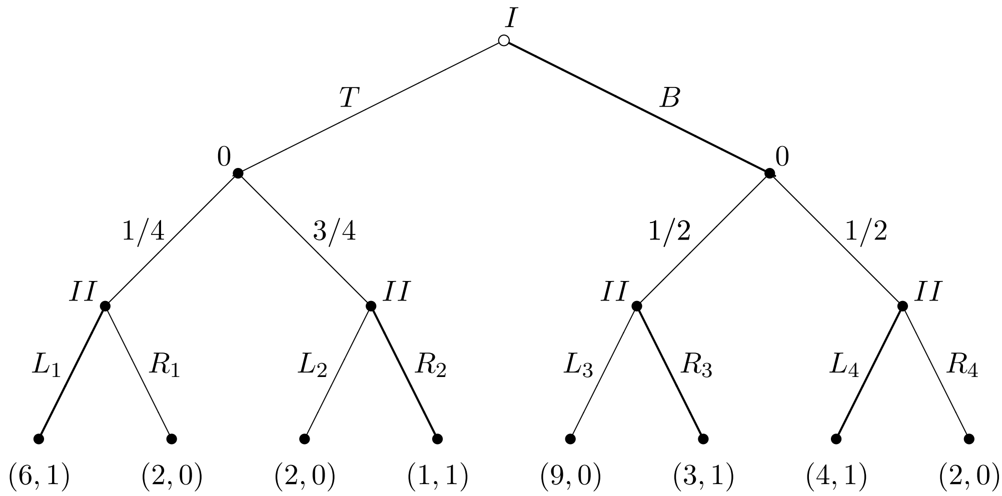


Si noti che questa volta ho "etichettato" indicato con nomi diversi i due rami che corrispondono alla scelta di giocare "pari" da parte del secondo giocatore: P_P e P_D. In effetti si tratta di due scelte diverse per il giocatore II: P_P indica la scelta di giocare "pari" da parte del giocatore II dopo che I ha scelto "pari", mentre P_D significa che II sceglie P dopo aver visto che I ha scelto D.

Naturalmente non occorre essere strateghi particolarmente avveduti per rendersi conto che il giocatore II in questo *nuovo gioco* ha la possibilità di guadagnare sempre.

Ora che abbiamo visto, seppur rapidamente, come si possa affrontare il problema della "contemporaneità" delle scelte, occupiamoci dell'intervento del caso. La soluzione è molto semplice: si introduce un nuovo "giocatore" 0 (il caso), che però farà le sue "scelte" in ogni vertice di sua pertinenza sulla base di una distribuzione di probabilità fissata sui rami uscenti da quel vertice.

Esempio:



Evito di scrivere la forma normale di questo gioco. Ricordo solo che il giocatore II ha a sua disposizione 16 strategie. Ho indicato con delle linee calcate le scelte ottimali che i giocatori effettueranno ad ogni vertice (tali strategie ottimali si individuano facilmente con una analisi “a ritroso” del gioco, come in programmazione dinamica). Per farsi un’idea di come si proceda, occorre cominciare “dalla fine”. Guardiamo allora l’ultimo nodo decisionale a sinistra (quello in cui II deve scegliere tra L_1 e R_1): visto che tocca a II scegliere, lui sceglierà L_1 in quanto questa scelta gli dà un guadagno pari a 1 anziché 0. Analogamente, II sceglierà R_2 anziché L_2 e così via. Una volta che abbiamo visto le scelte che farà II, possiamo ora (muovendoci a ritroso nell’albero delle decisioni) andare a vedere quale scelta farà I. Se lui sceglie T, sa che con probabilità 1/4 il giocatore II avrà da scegliere tra L_1 ed R_1: ma abbiamo già visto che in tal caso II sceglierà L_1, pertanto possiamo dire che, scegliendo T, con probabilità 1/4 il guadagno di I sarà 6. Visto che con probabilità 3/4 II si troverà a dover scegliere tra L_2 ed R_2, e che quindi come abbiamo visto sceglierà R_2, ne segue che con probabilità 3/4 il guadagno di I sarà 1. Ricapitolando: se I sceglie T ottiene un guadagno pari a 6 con probabilità 1/4 e pari a 1 con probabilità 3/4: quindi, scegliendo T il suo guadagno *atteso* (stiamo usando la terminologia consueta del calcolo delle probabilità) sarà pari a $\frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{3}{4} \cdot 1$, ovverossia $\frac{9}{4}$. La stessa analisi fatta sulla parte destra dell’albero ci porta a dedurre che il guadagno atteso per I, scegliendo B, sarà pari a $\frac{7}{2}$. Visto che $\frac{7}{2}$ è maggiore di $\frac{9}{4}$, il giocatore I sceglierà quindi B. Per cui il risultato atteso di questo gioco sarà di $\frac{7}{2}$ per I e di 1 per il giocatore II.

La coppia di strategie così ottenuta (si tratta di $(B, L_1R_2R_3L_4)$, cioè B per I e $L_1R_2R_3L_4$ per II) rappresenta un equilibrio perfetto nei sottogiochi, idea introdotta da Selten, come detto in una nota. Si dimostra che un equilibrio perfetto nei sottogiochi è anche un equilibrio di Nash per la forma strategica del gioco. Si può verificare come, nel primo dei giochi in forma estesa proposti, dei tre equilibri indicati solo (B, R_1R_2) risulti essere “perfetto nei sottogiochi” (lo si può trovare applicando l’induzione a ritroso).

2 Giochi a somma zero e *max min*

L’importanza dei giochi a somma zero è stata molto ridimensionata, rispetto all’importanza che avavano ai tempi della “creazione” della TdG, ma ciò non vuol dire che non offrano comunque esempi interessanti. Tra l’altro, l’idea di equilibrio di Nash per questi giochi presenta molte minori diffcoltà che non nel caso generale.

Esempio 2.1 Consideriamo il gioco:

$I \backslash II$	L	R
T	$(4, -4)$	$(1, -1)$
B	$(3, -3)$	$(2, -2)$

Si vede che (B, R) è equilibrio di Nash.
Osserviamo il fatto seguente (guardiamo il problema dal punto di vista di I):

$I \setminus II$	L	R	min delle righe ↓	
T	4	1	1	
B	3	2	2	← max dei min sulle righe
max delle colonne →	4	2		
		↑ min dei max sulle colonne		

Abbiamo che il *min dei max sulle colonne* è uguale al *max dei min sulle righe*!
E' un caso? No, se abbiamo un equilibrio, le strategie componenti sono di "maxmin" per I. Per quanto riguarda II, *ovviamente* vale lo stesso identico discorso; essendo il gioco a somma zero, le strategie di "maxmin" di II possono essere "viste" come strategie di "minmax" per I.
■

Quanto visto nell'esempio è un caso particolare di risultato generale sui giochi a somma zero, che collega la ricerca di equilibri alla ricerca delle strategie di *max min.*

Naturalmente, se il gioco dato non ha equilibrio, come il "pari o dispari", usiamo le strategie miste!
Il teorema di von Neumann (1928) garantisce che ogni gioco finito (cioè: ogni giocatore ha a disposizione un numero finito di strategie) a somma zero ha sempre un equilibrio in strategie miste. Il teorema di Nash (1950) estende questo risultato ai giochi non necessariamente a somma zero.

Vediamo alcuni esempi interessanti.

Esempio 2.2 In questo esempio, se le strategie venissero scelte "a caso" dai giocatori, essi avrebbero un guadagno atteso pari a zero. Le strategie d'equilibrio invece danno un vantaggio (anche se lieve) al giocatore I.

$I \setminus II$	L	R
U	$(-2, +2)$	$(+3, -3)$
D	$(+3, -3)$	$(-4, +4)$

Guadagno (ovvero: "payoff") atteso per I se I gioca $(p, 1-p)$ e II gioca $(q, 1-q)$:

$$\begin{aligned}
-2pq + 3p(1-q) + 3(1-p)q - 4(1-p)(1-q) = \\
= p[-2q + 3 - 3q - 3q + 4 - 4q] + [3q - 4 + 4q] = \\
= p[7 - 12q] + [7q - 4]
\end{aligned}$$

Per trovare l'equilibrio annulliamo il coefficiente di p (ciò deriva da un problema di ricerca di *max* per la funzione $p \mapsto p[7-12q] + [7q-4]$ sull'intervallo $[0,1]$):

$$7 - 12q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 7/12$$

Analogamente, si trova $p = 7/12$

	$I \backslash II$	$q = 7/12$ L	$1 - q = 5/12$ R
$p = 7/12$	U	$(-2, +2)$	$(+3, -3)$
$1 - p = 5/12$	D	$(+3, -3)$	$(-4, +4)$

In equilibrio, abbiamo un guadagno atteso per I pari a:

$$(p[7-12q] + [7q-4])_{p=7/12, q=7/12} = \frac{7}{12} \cdot [7 - 12 \cdot \frac{7}{12}] + [7 \cdot \frac{7}{12} - 4] = \frac{49-48}{12} = \frac{1}{12}$$

Questo gioco può essere "giocato", nel ruolo del giocatore II, sulla mia pagina web:

http://www.dima.unige.it/~patrone/s0v3.htm ■

Un programma in BASIC, che fissa per I la strategia mista ottimale e lascia al giocatore II la scelta di cosa giocare.

```
RANDOMIZE TIMER
' inizializzazione

'n e' una variabile usata per limitare il numero massimo di giocate possibili
n = 0

'g e' la variabile usata per indicare il guadagno del primo giocatore
g = 0

'si fissa la strategia mista ottimale per il giocatore I
p = 7 / 12

inizio:
'se si vuole che il giocatore II decida lui quante volte giocare,
'"scommentare" le righe seguenti
'INPUT "se vuoi finire, digita O (maiuscolo)"; k
'IF k = O THEN END

INPUT "metti la tua strategia: per L digita 1, per R digita 2"; s2
r = RND
IF r < p THEN s1 = 1 ELSE s1 = 2
'PRINT " r = "; r
'PRINT "s1 = "; s1
'PRINT " g = "; g
IF (s1 = 1 AND s2 = 1) THEN g = g + 2
'PRINT " dopo primo passo,   g = "; g
IF (s1 = 1 AND s2 = 2) THEN g = g - 3
'PRINT " dopo secondo passo, g = "; g
IF (s1 = 2 AND s2 = 1) THEN g = g - 3
'PRINT " dopo terzo passo,   g = "; g
IF (s1 = 2 AND s2 = 2) THEN g = g + 4
'PRINT " dopo quarto passo,  g = "; g

PRINT " mio guadagno = "; g

n = n + 1
'se si vuole che il giocatore II decida lui
'quante volte giocare, "commentare" la riga seguente
IF n > 120 THEN END

GOTO inizio
```

Esempio 2.3 Un altro esempio interessante permette di comprendere il ruolo del bluff nel poker. Si tratta di un gioco di "poker" un po' semplificato...
L'esempio l'ho copiato pari pari da vecchie dispense (in inglese) di Stef Tijs. Ma lo si trova anche in un bel libro introduttivo alla TdG (in inglese) di Straffin.

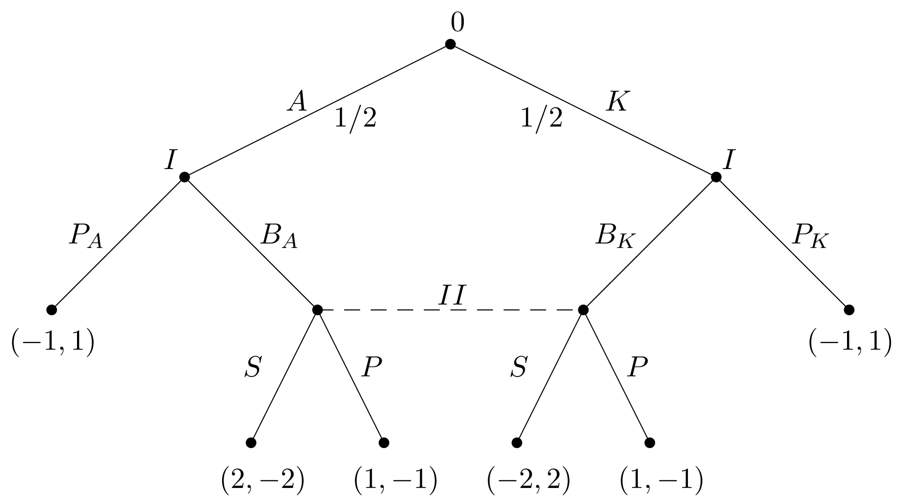
C'è un mazzo con *sole due carte*[2]: A e K. A è la carta "alta" (cioè quella che vince) e K è la carta bassa.
Il mazzo viene accuratamente mescolato :-)
Ognuno dei due giocatori mette un euro nel "piatto". Dopo di che I che estrae una carta dal mazzo coperto e la guarda. Può fare due cose:

- *passare* ("P"), nel qual caso II prende il "piatto"
- *rilanciare* ("B"), e allora deve aggiungere un euro al "piatto"

Se I ha passato, il gioco è finito. Se ha rilanciato, tocca a II, il quale può:

- *passare* ("P"), nel qual caso I prende il "piatto"
- *vedere* ("S"), nel qual caso anche II deve aggiungere un euro nel "piatto" ed entrambi devono mostrare le loro carte.
  - se I ha la carta "alta", cioè A, I prende il "piatto"
  - se I ha la carta "bassa", cioè K, II prende il "piatto"

Il gioco può essere rappresentato col seguente albero:



[2] E' ovvio che si tratta di una versione del poker che è praticamente ridicola. Ma il ruolo della scienza è quello di capire i punti *essenziali* di una questione, non di perdersi dietro complicazioni irrilevanti. Qui, l'obiettivo non è imparare a giocare a poker, ma capire (se ve ne sono) le ragioni del bluff

Il tratteggio serve a mettere in rilievo che II, quando fa la sua scelta, non sa la carta che ha in mano I.
Le strategie (cioè, i "piani d'azione" concepibili a priori) a disposizione di I sono quattro: P_AP_K, P_AB_K, B_AP_K, B_AB_K. Si noti che è stata fatta distinzione tra "P" quando il giocatore I ha in mano A (indicata come P_A) e "P" quando il giocatore I ha in mano K (indicata come P_K).
Data una strategia per I ed una strategia per II, possiamo determinare il payoff atteso dei due giocatori.
Ad esempio, data B_AP_K per I e S per II,
- con probablità $1/2$ I guadagna 2 e II guadagna -2
- con probablità $1/2$ I guadagna -1 e II guadagna 1
Quindi, il guadagno atteso è:
- per I, $(1/2) \cdot 2 + (1/2) \cdot (-1) = 1/2$
- per II, $(1/2) \cdot (-2) + (1/2) \cdot 1 = -1/2$
Numeri che andiamo a mettere nella tabella seguente, nella cella che troviamo all'incrocio tra la riga "B_AP_K" e la colonna "S".

	$I \backslash II$	$q = 1/3$ P	$1 - q = 2/3$ S
$p_1 = 0$	P_AP_K	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$
$p_2 = 0$	P_AB_K	$(0, 0)$	$(-3/2, 3/2)$
$p_3 = 2/3$	B_AP_K	$(0, 0)$	$(1/2, -1/2)$
$p_4 = 1/3$	B_AB_K	$(1, -1)$	$(0, 0)$

NB: la strategia B_AB_K prevede (per via di B_K) che il giocatore I bluffi. Si noti che la strategia ottimale per I prevede con probabilità positiva $(1/3)$ che I adotti la strategia B_AB_K e quindi che, quando lui ha la carte "bassa" (cioè K) bluffi mediamente $1/3$ delle volte. Si noti che è ottimale per I bluffare con questa "frequenza", né più spesso nè meno spesso!

Si noti che se I bluffa e *lo fa con la frequenza data*, ottiene un payoff atteso pari ad $1/3$, indipendentemente da quello che fa II. Se usasse invece, ad esempio, la strategia B_KP_K, il giocatore II potrebbe evitare di perdere giocando P.

■

Anche questo gioco può essere "giocato" sulla mia pagina web:

http://www.dima.unige.it/˜patrone/poker_semplificato_bluff.htm

3 Esempi critici

Vediamo alcuni esempi che lasciano qualche dubbio sull'uso dell'equilibrio di Nash, sia a fini normativi che a fini positivi.

Esempio 3.1 Abbiamo una situazione in cui vi sono due equilibri di Nash. Uno di questi è (B, R), e le strategie B ed R sono entrambe debolmente dominanti[3] per i rispettivi giocatori. Ma l'equilibrio (T, L) dà un risultato migliore[4] ad entrambi i giocatori!

$I \backslash II$	L	R
T	$2, 2$	$0, 2$
B	$2, 0$	$1, 1$

■

Esempio 3.2 In questi altri esempi, il fatto di avere molti equilibri di Nash mette in difficoltà i giocatori, se non hanno possibiltà di accordarsi su quale strategia usare prima di doverla scegliere effettivamente. E' il classico problema di coordinamento, e questi esempi sono offerti alla riflessione del lettore.

$I \backslash II$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
x_2	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
x_3	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$
x_4	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$

$I \backslash II$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
x_2	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
x_3	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(99, 99)$	$(0, 0)$
x_4	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$

[3]Una strategia si dice debolmente dominante per un giocatore se, quale che sia la scelta dell'altro giocatore, egli ottiene un payoff maggiore od uguale a quello che otterrebbe usando un'altra strategia

[4]In termini tecnici, si direbbe che *domina nel senso di Pareto*

$I \backslash II$	Torrazza	Campasso	Crevari	Boccadasse
S. Fruttuoso	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Albaro	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Crevari	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$
Coronata	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$

$I \backslash II$	S. Fruttuoso	Albaro	Crevari	Boccadasse
S. Fruttuoso	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Albaro	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Crevari	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$
Boccadasse	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$

$I \backslash II$	Torrazza	Palmaro	Crevari	Acquasanta
Torrazza	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Palmaro	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Crevari	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$
Acquasanta	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$

$\blacksquare$

Esempio 3.3 E questo è l'esempio che mostra come l'idea di strategia di *max min* possa essere più attraente che non quella di strategia "componente" di un equilibrio di Nash.

$R \backslash C$	A	B	C
A	$40, 40$	$60, 10$	$10, 40$
B	$10, 60$	$10, 10$	$60, 40$
C	$40, 10$	$40, 60$	$50, 50$

■