Il quattordicesimo appuntamento con

LA TEORIA DEI GIOCHI

Equilibrio di Nash? No, grazie!

di **Fioravante Patrone**

FIORAVANTE PATRONE, curatore di questa rubrica sulla Teoria dei giochi, è docente presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova ed è autore tra l'altro di *Decisori (razionali) interagenti, un'introduzione alla Teoria dei Giochi* (Edizioni PLUS, Pisa, 2006).

John Nash è il personaggio interpretato da Russell Crowe in *A beautiful mind* e ho l'impressione che la sua fama sia fondamentalmente dovuta al film più che al "premio Nobel" o – *ça va sans dire* – ai suoi contributi scientifici. Sia come sia, Nash comunque ha un ruolo centralissimo nella Teoria dei Giochi (in rete c'è chi parla di Teoria dei Giochi di Nash) e di certo il suo teorema di esistenza è stato un po' come la chiave d'argento per permettere di (sognare di) raggiungere il Kadath. Che cosa c'è di più utile, per un concetto di soluzione, se non l'avere a disposizione un teorema che garantisca che tale soluzione esista per lo meno sotto ipotesi ragionevolmente ampie? Il guaio è che, come nel meraviglioso onirico viaggio regalatoci da Lovecraft, può venir meno un *reality check*.

Di fronte a tanti neofiti, sparsi per la rete ed entusiasti dell'equilibrio di Nash, è il caso di dire *forte e chiaro* che l'equilibrio di Nash, pur se concetto importantissimo, è pieno di magagne.

Una delle più gravi è la sua non unicità. Anche una funzione può avere più di un punto di massimo ma questo non necessariamente ha effetti devastanti sul potere predittivo del modello che usa la metafora della massimizzazione di una funzione per descrivere ciò che si presume debba avvenire.

Ben diverso è il caso dell'equilibrio di Nash, come mostrano due esempi semplicissimi: un gioco di puro coordinamento e la famosa "battaglia dei sessi".

$I \setminus II$	L	R
T	1 1	0 0
B	0 0	1 1

$I \setminus II$	L	R
T	2 1	0 0
B	0 0	1 2

Nel caso del gioco di puro coordinamento, uno potrebbe pensare che tutto sommato i problemi siano poco rilevanti: che cosa ci importa se verrà scelto l'equilibrio di Nash *(T,L)* o *(B,R)*? Il guaio è che ognuno dei due giocatori deve fare la sua scelta *indipendentemente* dall'altro e quindi può ugualmente venir fuori *(T,R)* o *(B,L)*. Insomma, in questo caso la capacità predittiva dell'equilibrio di Nash è del tutto nulla. Nella battaglia dei sessi, si potrebbe addirittura pensare che l'ingordigia dei due giocatori (ognuno alla ricerca del suo proprio *payoff* massimo) porti a *(T,R)*... in ogni caso, anche qui, poco potere predittivo.
Non ci sono solo questi famosi *toy games* a testimoniare i guasti prodotti dalla non unicità dell'equilibrio. Ci sono intere classi di giochi in cui una straordinaria pletora di equilibri svuota quasi completamente la significatività di questo concetto di soluzione. Una classe è quella dei giochi a informazione incompleta, in particolare i giochi di segnalazione, sulla quale però non mi soffermo. Spenderò invece due parole su un'altra importante classe: quella dei giochi ripetuti (che sono stati oggetto di questa rubrica nelle tre precedenti "puntate"). C'è un interessante risultato nella Teoria dei Giochi – curiosamente noto come *folk theorem* – il quale mostra come nel dilemma del prigioniero infinitamente ripetuto, sotto ipotesi del tutto ragionevoli, si possano ottenere *payoff di equilibrio* che sono *efficienti*. Viene così a sparire la "maledizione dell'inefficienza" che caratterizza il dilemma del prigioniero, sia nel caso in cui viene "giocato" una sola volta, sia qualora sia giocato un numero finito di volte. Si tratta di un risultato molto interessante; peccato che ogni *payoff* il quale soddisfi condizioni minimali (dette di *razionalità individuale*) possa essere ottenuto come risultato di un equilibrio di Nash. Come a dire: potere discriminatorio (e quindi descrittivo) praticamente nullo!
I guai dell'equilibrio di Nash non si fermano agli aspetti connessi con la non unicità. Vi sono casi in cui il gioco ha uno ed un solo equilibrio di Nash e purtuttavia le persone "in carne ed ossa" ben si guardano dal giocarlo. L'esempio classico è dato dal seguente gioco (detto *non profitable game*, in quanto per entrambi i giocatori il *payoff* di equilibrio coincide con il valore di *maxmin*):

$I \setminus II$	A	B	C
A	40 40	60 10	10 40
B	10 60	10 10	60 40
C	40 10	40 60	40 40

È un robusto risultato sperimentale il fatto che la gran parte dei giocatori scelga la strategia *C*. Vale a dire, le scelte che normalmente si osservano corrispondono alla coppia *(C,C)* mentre l'equilibrio di Nash, come si può agevolmente verificare, è la coppia *(A,A)*. Tra l'altro, la conoscenza di questo fatto costituisce un significativo incentivo a persistere nella scelta della strategia *C*. Scegliere *A*, sapendo che generalmente i giocatori scelgono *C*, espone al rischio di ottenere un *payoff* pari a 10 (mentre scegliere *C* garantisce comunque un *payoff* pari a 40, qualunque sia la scelta fatta dall'altro giocatore). Non è molto allettante provare a sfruttare il fatto che presumibilmente l'altro giocatore giocherà tipicamente *C* e pertanto scegliere *B*: a fronte della possibilità di ottenere 60, c'è il rischio di trovarsi con un *payoff* pari a 10 (ad esempio, se anche l'altro giocatore provasse a giocare *B*, visto che...).
Non è questo l'unico esempio in cui le scelte dei giocatori si osservano essere diverse da quanto predirrebbe l'equilibrio di Nash. Esempi famosi in merito sono l'*ultimatum game* ed il *beauty contest*. Per questi due giochi è tuttavia possibile sostenere come vengano a mancare alcuni presupposti (la corrispondenza tra esiti monetari e *payoff*, nel caso dell'*ultimatum game*, o l'assunzione di conoscenza comune della razionalità dei giocatori) che consentono di applicare in modo diretto, banale, quanto prevede la teoria. Non si tratta di esempi che mostrino la non attendibilità dell'equilibrio di Nash, quanto di situazioni la cui modellizzazione va fatta con una maggior cura rispetto ad una loro "traduzione" immediata (ed ingenua) nel linguaggio della Teoria dei Giochi.
Vi è un altro esempio che vorrei invece citare, nel tentativo di minare la credibilità dell'equilibrio di Nash. Si tratta del gioco che di solito è chiamato *centipede* (una traduzione in italiano richiederebbe di parlare del *centogambe*) a causa dell'aspetto che ha la sua rappresentazione standard come "albero". Lo descrivo a parole.

Abbiamo due giocatori che si alternano nelle mosse (diciamo che il numero massimo di mosse previsto è 50 a testa). Ad ogni mossa, il giocatore cui spetta il turno può scegliere se far terminare il gioco o se continuare. Punto chiave del gioco è che ad ogni mossa, per il giocatore che decide di continuare, il *payoff* diminuisce di uno mentre aumenta di due quello dell'altro giocatore. Il risultato di tutto ciò è che l'equilibrio di Nash prevede che il primo giocatore, quello che inizia il gioco, lo termini immediatamente. Ebbene, anche in questo caso, la realtà "sperimentale" diverge sostanzialmente con la previsione fornita dall'equilibrio di Nash. Tipicamente i giocatori portano avanti il gioco per un certo numero di turni, in una sorta di tacito accordo di non belligeranza, finché uno decide di porre termine al gioco (tipicamente) prima che venga esaurito il numero massimo di mosse disponibili. Sono stupidi questi giocatori? Difficile sostenerlo: ottengono un risultato significativamente migliore di quelli che usassero "ciecamente" le prescrizioni dell'equilibrio di Nash. In una popolazione di giocatori, i seguaci devoti dell'insegnamento di Nash si troverebbero in una condizione di svantaggio. A rischio di estinzione, insomma.

Mi tocca fermarmi qui, dati i vincoli di spazio. D'altronde, questo non voleva essere un "trattatello" ma solo un'avvertenza per chi abbia orecchiato un po' di Teoria dei Giochi (magari da questa rubrica): non fidatevi del primo Nash venuto!

Chiudo lasciando alle vostre personali riflessioni il seguente gioco. La sua matrice ha 1000 righe e 1000 colonne. Nelle celle che si trovano sulla diagonale principale (eccetto la prima casella) ci sono i *payoff* 1 e 1. In tutte le altre celle, eccetto le quattro in alto a sinistra, i *payoff* sono 0 e 0. Infine, nell'angolo in alto a sinistra, i *payoff* sono quelli sotto indicati:

$I \setminus II$	L	R
T	1000 1000	0 1001
B	1001 0	1 1

Questo gioco ha 999 equilibri di Nash, corrispondenti alle celle sulla diagonale, dove troviamo i *payoff* 1 e 1. Voi che cosa fareste? ■

Un gioco in forma strategica (a due giocatori) è $G = (X,Y,f,g)$, dove X ed Y sono insiemi qualsiasi (rappresentano le strategie a disposizione rispettivamente del primo e del secondo giocatore) mentre $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ sono funzioni a valori reali le quali ci dicono quali *payoff* ottengono rispettivamente il primo giocatore (f) ed il secondo giocatore (g) in corrispondenza di ogni possibile coppia di strategie.

La coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è detta equilibrio di Nash per G se:

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ per ogni $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$ per ogni $y \in Y$

Il teorema di Nash garantisce che ogni gioco finito (cioè con X ed Y insiemi finiti) ha equilibrio, per lo meno in strategie miste.

IL PREMIO PEANO

Giovedì 18 novembre si è svolta al teatro Colosseo di Torino, con la "regia" di Franco Pastrone, la cerimonia di assegnazione del premio Peano che è andato quest'anno a David Ruelle. Il suo libro *La mente matematica*, edito in Italia da Dedalo, spiega come funziona il cervello di un matematico, ricorrendo all'introspezione personale e ad una serie di vivaci racconti sui principali protagonisti della Matematica del Novecento. David Ruelle, matematico e fisico

di origine belga, naturalizzato francese, è professore emerito di Fisica matematica presso l'IHES di Bures-sur-Yvette. I suoi principali contributi hanno riguardato la Meccanica statistica – nel 1986 ha vinto la *medaglia Boltzmann*, il più alto riconoscimento scientifico in questo campo – e la teoria dei sistemi dinamici. Prima del premio Peano, Ruelle aveva ricevuto la *medaglia Matteucci* nel 2004 e il *premio Poincaré* due anni dopo.