Il dodicesimo appuntamento con

LA TEORIA DEI GIOCHI

Repetere, repetere, ..., repetere. Siste gradum!

di **Fioravante Patrone**

FIORAVANTE PATRONE, curatore di questa rubrica sulla Teoria dei Giochi, è docente presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova ed è stato direttore del "Centro Interuniversitario per la Teoria dei Giochi e le sue Applicazioni".

Nella scorsa "puntata" ci siamo occupati del dilemma del prigioniero (*DP*) ripetuto infinite volte, vedendo come possa aversi un esito efficiente senza la necessità di accordi vincolanti: abbiamo infatti identificato una coppia di strategie che è un equilibrio di Nash per questo "lungo" gioco. Ora vediamo invece che cosa succede se il gioco viene ripetuto un numero finito di volte.

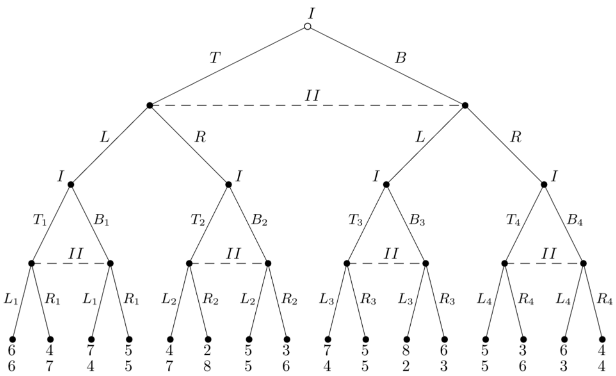
Penso che i lettori di questa rivista siano ben consapevoli di due fatti, che mi limito a richiamare:

- usare, come abbiamo fatto nella "puntata" precedente, un orizzonte temporale infinito può rappresentare un'utile semplificazione. Capita piuttosto frequentemente che, nel passare da un modello finito ad uno infinito, si possa guadagnare (e parecchio) sui calcoli. Ci sono poi metodi analitici sofisticati come, ad esempio, il metodo di *omogeneizzazione* che consentono di studiare proprietà non ovvie di mezzi finemente composti;
- c'è comunque il problema del passaggio al limite. Che connessione c'è fra i risultati ottenuti in un modello finito ed uno infinito, che possano essere visti come ragionevolmente vicini? Questo è un punto cruciale per comprendere la valenza e i limiti del modello "infinito".

Il caso dei "giochi ripetuti" sostanzialmente conferma l'osservazione generale illustrata nel primo punto. Per il secondo, la risposta non è netta ma proprio questo fatto è un elemento di particolare interesse. Vedremo infatti (pur senza esagerare con i dettagli tecnici) come i risultati ottenuti nel caso finito possano essere vicini o lontani, anche radicalmente, rispetto al modello infinito a seconda di alcuni dettagli che a prima vista potrebbero apparire non essenziali.

Per illustrare questo tipo di fenomeno, partiamo dal caso più semplice possibile: un gioco (a due giocatori, con due strategie ciascuno) a due soli stadi. Anzi, consideriamo proprio il dilemma del prigioniero (*DP*) di cui ci siamo occupati la scorsa volta.

Rappresentazione del *DP* a due stadi, in versione estesa e strategica



Può essere utile avere visivamente di fronte una rappresentazione di questo gioco a due stadi, sia nella versione in forma estesa che in quella strategica (vedi figure; per ragioni di spazio e di leggibilità sono state omesse un certo numero di colonne nella tabella che rappresenta la forma strategica). In particolare, la "visione" della forma strategica mette in evidenza come il numero di strategie cresca in modo probabilmente inaspettato. Il loro aumento è veramente impressionante: dalle 32 strategie (per ogni giocatore) nel caso a due stadi, si passa a 2^{21} (oltre 2 milioni) per tre stadi, 2^{81} per quattro stadi e lascio al lettore immaginare quale possa essere la formula generale... Ritornerò su questo tema in puntate successive, perché il gran numero di strategie rappresenta un aspetto interessante dei giochi ripetuti.

Vediamo allora il *DP* a due stadi. Dal gioco in forma strategica si ricavano facilmente (è solo una verifica noiosa) gli equilibri di Nash: sono 16, evidenziati dal "doppio bordo" delle caselle che indicano i loro corrispondenti *payoff*. Se però proviamo a seguire sull'albero il percorso che questi equilibri determinano, ci accorgiamo che per tutti le scel-

I \ II	$L\,L_1\,L_2\,L_3\,L_4$	$L\,L_1\,L_2\,L_3\,R_4$	$L\,L_1\,L_2\,R_3\,L_4$	...	$R\,L_1\,R_2\,L_3\,L_4$	$R\,L_1\,R_2\,L_3\,R_4$	$R\,L_1\,R_2\,R_3\,L_4$	$R\,L_1\,R_2\,R_3\,R_4$	$R\,R_1\,L_2\,L_3\,L_4$	$R\,R_1\,L_2\,L_3\,R_4$	$R\,R_1\,L_2\,R_3\,L_4$	$R\,R_1\,L_2\,R_3\,R_4$	$R\,R_1\,R_2\,L_3\,L_4$	$R\,R_1\,R_2\,L_3\,R_4$	$R\,R_1\,R_2\,R_3\,L_4$	$R\,R_1\,R_2\,R_3\,R_4$
$TT_1T_2T_3T_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TT_1T_2T_3B_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TT_1T_2B_3T_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TT_1T_2B_3B_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TT_1B_2T_3T_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$TT_1B_2T_3B_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$TT_1B_2B_3T_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$TT_1B_2B_3B_4$	(6,6)	(6,6)	(6,6)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$TB_1T_2T_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TB_1T_2T_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TB_1T_2B_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TB_1T_2B_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)	(2,8)	(2,8)	(2,8)	(2,8)
$TB_1B_2T_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$TB_1B_2T_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$TB_1B_2B_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$TB_1B_2B_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(7,4)	...	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(5,5)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
$BT_1T_2T_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BT_1T_2T_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)
$BT_1T_2B_3T_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BT_1T_2B_3B_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$
$BT_1B_2T_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BT_1B_2T_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)
$BT_1B_2B_3T_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BT_1B_2B_3B_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$
$BB_1T_2T_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BB_1T_2T_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)
$BB_1T_2B_3T_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BB_1T_2B_3B_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$
$BB_1B_2T_3T_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BB_1B_2T_3B_4$	(7,4)	(7,4)	(5,5)	...	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)
$BB_1B_2B_3T_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)	(5,5)	(3,6)
$BB_1B_2B_3B_4$	(2,8)	(2,8)	(6,3)	...	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	(4,4)	(6,3)	(4,4)	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$	(6,3)	$\boxed{(4,4)}$

Per saperne qualcosa in più...

Ci sono due aspetti un po' trascurati nell'articolo, che devono essere menzionati.

Uno riguarda i *payoff* usati. Nelle figure ho sommato i *payoff* dei singoli stadi, il che è equivalente (sotto ampie ipotesi sulle preferenze dei giocatori) ad usare la loro media aritmetica a cui ho fatto riferimento nel testo. Questa scelta è ragionevole se le ripetizioni avvengono in un breve arco di tempo, in quanto un eventuale "fattore di sconto" sarà trascurabile. Rinvio al testo di S. French, citato in bibliografia, per chi fosse interessato ad approfondire questi aspetti (inclusa la legittimità di usare un fattore di sconto).

Il secondo aspetto da tener presente è che l'uso dell'equilibrio di Nash, come soluzione del gioco, è discutibile nel caso dei giochi ripetuti. Essi si presentano in modo naturale come giochi in forma estesa (si veda il diagramma ad albero per il *DP* a due stadi). Pertanto è più appropriato un altro concetto di soluzione, introdotto nel 1965 da Selten, ovvero gli equilibri perfetti nei sottogiochi (*Subgame Perfet Equilibrium: SPE*). Gli *SPE* impongono una condizione più restrittiva di quella data dall'equilibrio di Nash. Ad esempio, nel *DP* a due stadi, si ha un solo *SPE* (che "ovviamente" è: $(B\,B_1\,B_2\,B_3\,B_4, R\,R_1\,R_2\,R_3\,R_4)$) e questa unicità dello *SPE* vale qualunque sia il numero di stadi. È possibile replicare un ampio numero di risultati ottenuti per gli equilibri di Nash in giochi ripetuti anche per gli *SPE*, pur se questo talvolta richiede di imporre ulteriori condizioni. Su tutto questo mi limito a rinviare alla letteratura specializzata. I testi di R.B. Myerson e di M. Osborne-A. Rubinstein, citati in bibliografia, sono ottimi testi di riferimento.

te effettivamente fatte sono solo: B, R, B_4, R_4. Quindi, ad esempio, un osservatore esterno non è in grado di distinguere fra questi 16 equilibri. Questo fatto ci ricorda che una strategia è "nella mente" di un giocatore e, in quanto tale, non è (completamente) osservabile dall'esterno [1]. Da questo deriva, anche in giochi con ben più di due stadi, la difficoltà ad immaginare quale sia la strategia adottata dall'altro giocatore (se si tratta di strategie miste, andiamo ancora peggio).

Cambia qualcosa se i turni sono tre? No, nulla di essenziale. Il numero degli equilibri di Nash aumenta (non mi sono mai preso la preso la briga di calcolarne il numero) ma continua a sussistere quanto detto prima: le mosse osservate non sono altro che B e R. Questo vale qualunque sia il numero *finito* di turni previsto. Ne segue, in particolare, che l'esito resta inefficiente: per quanto grande sia il numero dei turni, ai giocatori non è dato di ottenere alcun recupero sul fronte dell'efficienza.

Per la questione evidenziata nella seconda osservazione iniziale, è evidente che ci troviamo di fronte a una netta *discontinuità* nel passaggio dal caso finito a quello infinito. Visto che nel caso infinito abbiamo individuato equilibri di Nash che danno luogo a *payoff* efficienti, si poteva ragionevolmente congetturare che all'aumentare del numero di turni ci si avvicinasse sempre più all'efficienza. Invece in ogni gioco finitamente ripetuto, per quanto lungo, ciò che si ottiene come esito di equilibrio non è altro che una ipnotizzante ripetizione, turno per turno, dei *payoff* inefficienti previsti dall'equilibrio di Nash nel *DP*.

Ovviamente ci si chiede: *perché*? Che cosa è *sostanza* e cosa *accidente*? A questa domanda possono essere date varie risposte, come normalmente capita... Mi limiterò qui ad illustrarne una, rinviando alle puntate successive per altre risposte focalizzate sul tema del "passaggio al limite", quando il numero degli stadi tende ad infinito. Vedremo che ci sono molti modi di passare al limite.

La prima risposta, che vedremo qui, mette in evidenza un carattere eccezionale del *DP*: la struttura dei *payoff* del *DP* non dà la possibilità di "punire" chi non rispetti eventuali accordi stipulati al fine di raggiungere un risultato efficiente, o quanto meno migliore da questo punto di vista dell'equilibrio di Nash. Si noti che, parlando di accordi, stiamo parlando di accordi non vincolanti. Altrimenti non staremmo qui a perdere tutto questo tempo: mandiamo i giocatori dal notaio a firmare un contratto in cui si impegnano a giocare una data coppia di strategie in grado di garantire un risultato efficiente (scelgano loro quali) e non ci preoccupiamo degli equilibri di Nash [2].

Per comprendere l'importanza di disporre di una "strategia punitiva", basta considerare il gioco seguente che può essere visto come una sorta di variante del *DP*:

$I \setminus II$	L	R	Z
T	3 3	1 4	0 0
B	4 1	2 2	0 0
W	0 0	0 0	-1 -1

In che cosa differisce dal *DP*? Per l'aggiunta di una strategia per ciascun giocatore. Una strategia che è – si badi bene – "perdente" (in termini tecnici, è *fortemente dominata* [3]) tanto è vero che, se il gioco fosse ad un solo stadio, nessun giocatore la userebbe. Ma, se il gioco è ripetuto, *I* può utilizzare *W* per "punire" *II* in quanto l'uso di *W* garantisce che il massimo *payoff* ottenibile da *II* è 0 che è inferiore al *payoff* di equilibrio, 2. Ciò permette di immaginare un accordo (ricordo: non vincolante...) fra i due giocatori di questo tipo: *I* gioca sempre *T* (e *II* gioca *L*) a meno che non abbia osservato ad un certo stadio che *II* ha "sgarrato" (giocando *R*, ad esempio) nel qual caso *I* passa a giocare *W* fino alla fine.

Abbiamo recuperato lo stesso tipo di risultato che valeva per il gioco di durata infinita? No, sarebbe troppo facile! C'è infatti un piccolo problema: la strategia sommariamente descritta sopra, accoppiata alla sua "gemella" per II, non ci dà un equilibrio di Nash! Come mai? Semplice: all'ultimo turno il giocatore *I* (ovviamente lo stesso vale anche per *II*, ma non è questo il punto rilevante) ha convenienza a violare l'accordo e giocare *B*. Visto che poi il gioco è finito, con che cosa lo punisce *II*?

L'idea della punizione non funziona? No. Semplicemente ci siamo dimenticati che le punizioni servono per (sperare di) ottenere migliori comportamenti futuri e, all'ultimo stadio, di futuro non ce n'è rimasto più, neanche una goccia.

Si può rimediare? Sì. Basta modificare la strategia prevedendo che, se l'accordo non viene rotto, comunque negli ultimi k turni vengano giocati *B* ed *R* rispettivamente. Quanto grande deve essere k rispetto agli n stadi previsti? La condizione è semplice: se uno devia nei primi n-k stadi, si trova l'altro che gli gioca la strategia punitiva almeno per i k stadi finali, per cui si ritrova a perdere (in termini di *payoff*) k volte la differenza d fra il *payoff* di equilibrio (qui 2) e invece il massimo ottenibile se è punito (qui 0). Basta che d superi la convenienza che c'è nel "provare a fare il furbo" non giocando *B*. Qui la "convenienza" è pari a 1 e quindi basta che sia k=1. Va anche osservato che, negli ultimi k stadi, non c'è convenienza a deviare in quanto l'accordo prevede che sia usata una strategia d'equilibrio.

Ottimo: abbiamo ottenuto un equilibrio di Nash interessante per il nostro gioco a n stadi. Un aspetto molto simpatico è che la perdita di efficienza è pari a (uso come *payoff* la media dei *payoff* sui vari stadi) $[3n-(3(n-1)+2)]/n$ ovvero $1/n$ che se ne va tranquillamente a zero quando n va all'infinito. È un ottimo esempio di "continuità" che ci porta a ritenere che vi sia un buon accordo fra il modello a stadi finiti e quello a stadi infiniti (si noti che, come penso fosse ampiamente previsto da chi legge, anche per questo gioco infinitamente ripetuto si riesce ad ottenere (3,3) ad ogni turno come profilo di *payoff* di equilibrio).

Si può quindi recuperare una sorta di continuità fra gioco finito e gioco infinito. Ma abbiamo imparato che questa continuità non vale sempre. Non c'è nel *DP* ed abbiamo individuato *una* ragione di questo risultato: la mancanza di strategie *punitive*. Nel prossimo appuntamento, vedremo di scovare altri fattori interessanti. Non sarà difficile, visto che la realtà supera sempre la fantasia di qualunque costruttore di modelli (matematici). Comunque, una cosa l'avete imparata (o forse già la sapevate?): se il vostro *bisagnino* di fiducia vi rifila delle mele marce, è probabile che stia per chiudere o per trasferirsi. ■

BIBLIOGRAFIA

French S., *Decision Theory*, Ellis Horwood, New York, 1993.

Myerson R. B., *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge (MA), 1991.

Osborne M. e Rubinstein A., *A course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA), 1994. Disponibile in rete per il download gratuito: *http://theory.economics.utoronto.ca/books/*

NOTE

[1] Anche se in futuro magari... ma, per adesso, con la "fashionable" *neuroeconomia* siamo ai primi vagiti.

[2] Ma, prima di andare dal notaio, i giocatori sono coinvolti in un altro gioco che si presenta in modo *non cooperativo*! Insomma, volendo usare accordi vincolanti (e quindi la strumentazione dei giochi *cooperativi*), siamo di fronte alla classica situazione che si incontra molto frequentemente: alla fin fine, siamo ricondotti ad analizzare un gioco *non cooperativo*. Questo in parte spiega come mai i giochi non cooperativi siano stati per un certo periodo considerati gli unici (o quasi) degni di essere trattati, specialmente fra gli economisti.

[3] Il termine qui usato non è standard in letteratura, ma io preferisco una terminologia più adeguata e più espressiva nel contesto dell'idea di dominanza fra strategie (da "povero matematico", privo di fantasia, sono abituato a ritenere che servano tre nomi diversi per denotare tre concetti diversi).