L'undicesimo appuntamento con

LA TEORIA DEI GIOCHI

Repetita iuvant?

di **Fioravante Patrone**

FIORAVANTE PATRONE, curatore di questa rubrica sulla Teoria dei giochi, è docente presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova ed è stato direttore del "Centro Interuniversitario per la Teoria dei Giochi e le sue Applicazioni".

Nella Teoria dei Giochi (*TdG*) il gioco più noto è rappresentato dal Dilemma del Prigioniero (*DP*). In questo numero della *Lettera* lo "usiamo" per vedere se le previsioni della teoria sono confermate in qualche modo dai fatti. In effetti, una tipica critica che viene rivolta proprio a come i "giochisti" trattano il *DP*, è che "nella pratica" non è poi così scontato osservare quei comportamenti "egoistici" previsti dalla *TdG* e che portano ad un esito inefficiente. Difficile negare validità a queste osservazioni, però...

Però è opportuno non dimenticare quali siano le ipotesi retrostanti il *DP* (così come, se ci dimentichiamo di togliere l'aria, non è vero che una piuma cade veloce come un pezzo di ferro). Allora, senza voler scendere in dettagli troppo raffinati, vorrei ricordare due presupposti che talvolta non vengono presi in debita considerazione.

Il primo aspetto da chiarire riguarda le preferenze dei giocatori. Tipicamente (soprattutto in testi divulgativi), il gioco è descritto mediante una tabella del tipo:

$I \setminus II$	L	R
T	$R \quad R$	$P \quad S$
B	$S \quad P$	$Q \quad Q$

dove P, Q, R, e S indicano anni di galera (e si immagina che sia $P > Q > R > S$). È essenziale la seguente ipotesi: le preferenze di ciascun giocatore sono determinate *esclusivamente* dal numero di anni di galera che sono previsti per lui (e preferisce stare in galera il meno possibile). In termini classici di *TdG*, questo corrisponde ad avere un gioco in forma strategica i cui *payoff* sono:

$I \setminus II$	L	R
T	$c \quad c$	$a \quad d$
B	$d \quad a$	$b \quad b$

con la solita condizione per il *DP* che sia: $a < b < c < d$. Detto questo, passiamo ad un secondo malinteso che a volte si accompagna alle critiche formulate alle previsioni avanzate dalla *TdG*. Il *DP* è un gioco che viene giocato *una ed una sola volta*. Nella formulazione classica del gioco, l'assunto è che in seguito i giocatori non si incontreranno più. Anzi, le loro decisioni non sono in grado di influenzare il comportamento dell'altro in future interazioni. Quindi minacce, paura di ritorsioni, "collusione", sono *parole vuote*.

Se questa "difesa d'ufficio" era doverosa, il secondo malinteso pone comunque una questione: si possono – e come – modellizzare situazioni in cui l'interazione strategica si ripete? Non è che questi modelli offrano previsioni meno "tristi" rispetto al classico *DP* e, ciò che più conta, più vicine a quanto viene osservato?
La risposta alla prima domanda è pronta, anzi fa parte dell'ABC della *TdG*: in generale i giochi "in forma estesa" offrono uno strumento abbastanza flessibile per descrivere interazioni per le quali la struttura temporale è significativa. Non ci avventureremo ad analizzare modelli particolarmente sofisticati. Ci limiteremo a considerare alcuni modelli appartenenti alla classe dei cosiddetti *giochi ripetuti*.

In altre parole, considereremo il *DP* (più precisamente, il gioco della tabella seguente) e immagineremo che venga ripetuto più volte. Come vedremo, proprio dalla specificazione dettagliata di questo "più volte" dipenderà il tipo di risultato che otterremo.

I \ *II*	*L*	*R*
T	3 3	1 4
B	4 1	2 2

Cominciamo, in questa puntata, ad esaminare il caso più estremo, in cui il *DP* venga ripetuto *infinite volte*. Sarà agevole provare che questo gioco ammette equilibri di Nash i quali danno ai giocatori *payoff* efficienti (purché sia soddisfatta una condizione piuttosto ragionevole, che analizzeremo a suo tempo).
Prima di poter dire qualcosa di sensato, dobbiamo precisare un paio di aspetti. Una prima caratteristica importante è molto semplice da descrivere: supporremo che le scelte fatte dai giocatori siano osservabili (senza errore alcuno) da parte dei giocatori i quali hanno, inoltre, una memoria illimitata riguardo a tutte le scelte fatte nel passato.
La seconda precisazione è di non minore importanza. Si tratta di dire come vengono computati i *payoff* di questo gioco infinito. Faremo l'ipotesi che ognuno dei due giocatori effettui un calcolo molto semplice: fa la somma dei *payoff* ottenuti ad ogni turno, scontandoli opportunamente. Vale a dire: se ottiene i *payoff* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ valuterà questo *stream* di *payoff* parziali (ν è il fattore di sconto, normalmente compreso fra 0 e 1) come:

$$x_0 + x_1\nu + x_2\nu^2 + \ldots + x_n\nu^n + \ldots \; .$$

Ciò detto, proponiamoci di verificare se la seguente strategia (accoppiata alla gemella per l'altro giocatore) fornisca, oppure no, un equilibrio di Nash per il gioco infinitamente ripetuto:

- gioco T al primo turno;
- continuo a giocare T nei turni successivi, purché l'altro abbia giocato sempre L;
- altrimenti, dal turno successivo, passo a giocare B per sempre.

Verificare se questa strategia è un equilibrio di Nash è molto semplice. Intanto dobbiamo valutare il *payoff* che ottiene un giocatore, quando viene giocata questa coppia di strategie:

$$3 + 3\nu + 3\nu^2 + \ldots + 3\nu^n + \ldots = \frac{3}{1-\nu} \; .$$

Per poter affermare che si ha un equilibrio di Nash, occorre e basta verificare che non siano vantaggiose deviazioni unilaterali. Se il primo giocatore devia al primo turno [1], ottiene un *payoff* pari a 4 ma poi, nei turni successivi, ottiene un *payoff minore o uguale* a 2 in quanto l'altro giocherà (come previsto dalla strategia) sempre *R*, a partire dal turno successivo al "tradimento". Pertanto, il *payoff* è minore o uguale a:

$$4 + 2\nu + 2\nu^2 + \ldots + 2\nu^n + \ldots = 2 + \frac{2}{1-\nu} \; .$$

È $\dfrac{3}{1-\nu} \geq 2 + \dfrac{2}{1-\nu}$ se e solo se $\dfrac{1}{1-\nu} \geq 2$ ovvero

se e solo se $\nu \geq \dfrac{1}{2}$.

Come forse qualcuno avrà previsto, il risultato dipende dal fattore di sconto. Se entrambi i giocatori [2] hanno un fattore di sconto maggiore o uguale a 1/2, abbiamo un equilibrio di Nash. È evidente che, se uno valuta troppo poco i *payoff* futuri, avrà interesse a deviare per incamerare "subito" un buon *payoff* senza che le punizioni future gli facciano un baffo.

Mario Sangiovanni, *La piazza di Pozzuoli*

Questo risultato, pur nella sua estrema semplicità, e nonostante sia espresso nel contesto di un modello molto stilizzato, è comunque interessante. Mi piace mettere in evidenza almeno tre aspetti che giocano a favore del "realismo" del modello:

- l'osservazione che una relazione di lunga durata (e qui la durata l'abbiamo presa infinita, per non sbagliare!) favorisce la possibilità di un risultato migliore, senza dover affatto modificare l'assunto di razionalità ed intelligenza dei nostri decisori;
- il ruolo che gioca il fattore di sconto ovvero la maggiore o minore impazienza dei giocatori: se il futuro importa poco, che la durata dell'interazione sia lunga non dovrebbe contare un granché;
- nei calcoli precedenti non si vede ma naturalmente la differenza tra i *payoff* conta: sia nel rendere più o meno forte la "tentazione" (che è data dalla differenza fra d e c: se questa differenza fosse stata pari a 100 anziché 1, l'incentivo offerto a deviare avrebbe compensato fattori di sconto molto più vicini ad 1), sia nel rendere più o meno efficace la "punizione" (che è data dalla differenza fra c e b).

Non male, e allora forse vale la pena approfondire un po'. Ad esempio, cosa succederebbe se la durata fosse "molto lunga", invece che essere infinita? Avremmo un morbido passaggio al limite o una "discontinuità all'infinito"? E se la durata fosse aleatoria? E se i giocatori non potessero osservare o ricordare tutto?

Alla prossima!

NOTE

[1] Se la deviazione avviene ad un turno successivo, i conti rimangono perfettamente identici: l'effetto di una deviazione al turno k-esimo è semplicemente quello di fare apparire un fattore v^{k-1} in entrambi i membri della disuguaglianza. Qui stiamo considerando deviazioni in grado di influenzare i *payoff* finali: altre deviazioni sono irrilevanti dal punto di vista dell'equilibrio di Nash ma non lo sarebbero se fossimo interessati, ad esempio, agli equilibri di Nash *perfetti nei sottogiochi*.

[2] Non sto supponendo che i due giocatori abbiano lo stesso fattore di sconto, anche se si tratta di una ipotesi che potrebbe essere sostenuta con qualche buon argomento.