Il nono appuntamento con

LA TEORIA DEI GIOCHI

Gli equilibri propri del giovane Myerson

di **Fioravante Patrone**

FIORAVANTE PATRONE, curatore di questa rubrica sulla Teoria dei giochi, è docente presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova ed è stato direttore del "Centro Interuniversitario per la Teoria dei Giochi e le sue Applicazioni".

Per i non addetti ai lavori, il titolo può risultare un po' criptico. Lo sarebbe stato ancor di più se fosse apparso su qualche fascicolo precedente della Lettera, visto che stiamo parlando di Roger Bruce Myerson, uno dei tre vincitori del cosiddetto "Premio Nobel per l'Economia", la cui dizione esatta è *Premio della Banca di Svezia per le scienze economiche in memoria di Alfred Nobel*. Infatti, il *Nobel* per l'Economia non rientra fra quelli originariamente istituiti su disposizione di Nobel ma si aggiunse in seguito, nel 1969. Il premio 2007 è stato assegnato a Leo Hurwicz, Eric Maskin e, appunto, a Roger Myerson per il contributo da loro dato alla creazione della *Teoria dei meccanismi*. Visto che di Teoria dei giochi si tratta, tanto per cambiare, potrebbe sembrare doveroso dedicare la rubrica a questo tema. Ma questo mi metterebbe nei guai, visto che gli ho già dedicato due puntate. Mi riferisco agli articoli su *Re Salomone*, dove peraltro si faceva riferimento – guarda caso – alla *Maskin monotonicity*. Se qualcuno è bravo, e questo è certamente vero per i tre sopra menzionati, magari avrà fatto qualcosa di interessante anche di altro genere. Così è. Infatti parlerò di un contributo di Myerson, pubblicato da giovane nel 1978, che si inserisce in un contesto diverso da quello dei *meccanismi*. Mi riferisco alla "invenzione" da parte sua, degli *equilibri propri*. Insomma, un suo contributo a quella che stava diventando la saga dei raffinamenti dell'equilibrio di Nash. Ma andiamo con ordine.

Contrariamente alla percezione che si ha fra i non addetti ai lavori, la nozione di *equilibrio di Nash* presenta molti problemi. Tra questi, il fatto che un gioco può avere "troppi" equilibri di Nash (questo accade, per esempio, con i giochi ripetuti) e quindi, alla fin fine, il valore dell'equilibrio di Nash (sia normativo che predittivo) viene severamente ridimensionato. Non solo: alcuni equilibri di Nash sono poi poco plausibili. La "saga dei raffinamenti", sopra menzionata, sta ad indicare lo sforzo intenso che venne dedicato a cercare di trovare un *set* di ragionevoli ulteriori condizioni da imporre, oltre alla condizione di equilibrio di Nash. La storia comincia con Selten (altro Nobel per l'Economia) che nel 1965 mostrò come la condizione di equilibrio di Nash possa contemplare delle scelte, da parte dei giocatori, difficilmente giustificabili. Vediamo rapidamente il retroterra formale.

Un gioco [1] in forma strategica è $G = (X, Y, f, g)$ dove X ed Y sono due insiemi (gli spazi delle strategie a disposizione rispettivamente del giocatore *I* e *II*) mentre f e g sono funzioni a valori reali definite su $X \times Y$, ossia i *payoff* per i giocatori. Se assumiamo un contesto non cooperativo, ovvero se i giocatori non hanno la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti, allora la più "accreditata" idea di "soluzione" per G è data dall'equilibrio di Nash. Una coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un *equilibrio di Nash* per G se:

$$
\begin{aligned}
f(\bar{x}, \bar{y}) &\geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X \\
g(\bar{x}, \bar{y}) &\geq g(\bar{x}, y) \text{ per ogni } y \in Y.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Non è questa la sede per discutere le ragioni che inducono a ritenere un equilibrio di Nash come una interessante *coppia di strategie* che può meritare l'epiteto di *soluzione* per il dato gioco G. Né ci metteremo ad argomentare sulle molte difficoltà che, per converso, lasciano dubbiosi sul fatto di proporre questo concetto quale *soluzione* di un gioco (uno dei guai maggiori è che tipicamente un gioco ha più di un equilibrio di Nash e questa pluralità di equilibri comprende scelte che non è proponibile ritenere equivalenti).
Per comprendere il tipo di obiezioni sollevate da Selten nel 1965 è sufficiente considerare un semplice gioco descritto "in forma estesa". Rimando alla figura a lato, che non credo abbia bisogno di particolari didascalie per essere compresa. Chiaramente, il giocatore I ha due strategie a sua disposizione: T e B. Analogamente, il giocatore II: L e R. Detto questo, possiamo rappresentare la situazione di interazione strategica, riassunta nel disegno, con un *gioco in forma strategica*, che si lascia facilmente descrivere mediante una tabella (anch'essa di comprensione immediata):

I \ II	**L**	**R**
T	**(2,1)**	**(0,0)**
B	**(1,2)**	**(1,2)**

A volte non viene sottolineato a sufficienza che nella interpretazione solita, standard, di un gioco in forma strategica si suppone che i giocatori effettuino le loro scelte *contemporaneamente*. A prima vista, questo potrebbe sembrare problematico, volendo trasformare un gioco come quello in figura – del quale è stata resa evidente una struttura temporale di precedenza nelle mosse – in una tabella in cui si sottintende che i due giocatori scelgano contemporaneamente.
In realtà – argomentava von Neumann già nel 1928 – non c'è alcun problema. Basta ricordare che i giocatori, nella Teoria dei giochi classica (e noi ci stiamo muovendo in quel contesto), sono *mostruosamente* intelligenti, anzi vi è conoscenza comune di questa caratteristica. Ovvero, I è intelligente ma sa anche che II è intelligente, che II sa che I è intelligente, che II sa che I sa che II è intelligente ecc. Se così stanno le cose, allora non si capisce quale problema possano avere i giocatori a *pianificare* le loro mosse *prima* che il gioco inizi. Questa pianificazione la può fare, senza alcun problema, anche II: in fondo, deve semplicemente scegliere cosa fare nel caso in cui I scegliesse T. Non essendovi alcuna informazione in attesa di essere disvelata, il giocatore II può fare benissimo questa scelta, contingente alle scelte possibili di I, prima che il gioco cominci. Insomma, se leggiamo le intestazioni di riga T e B (e quelle di colonna) come due diverse strategie fra cui scegliere a priori, anziché mosse decise lì per lì, possiamo dire con tutta tranquillità di avere davvero convertito il nostro gioco "dinamico" in un gioco a scelte contemporanee.

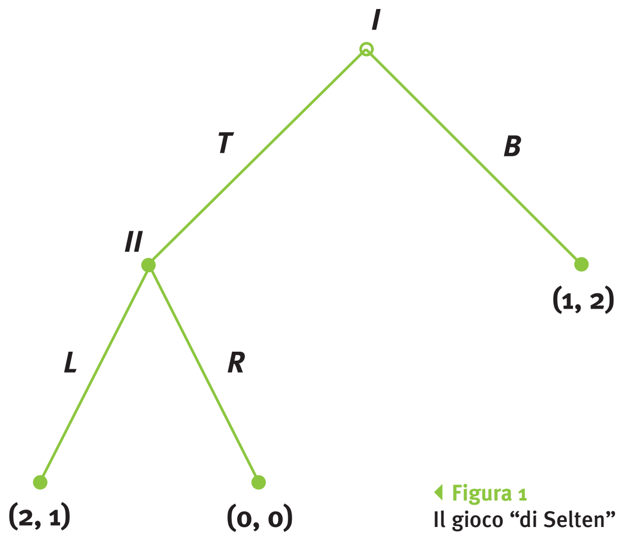

Figura 1
Il gioco "di Selten"

C'è però una grana. Se andiamo a cercare gli equilibri di Nash del gioco descritto nella tabella, ci accorgiamo che ce ne sono due: *(T,L)* e *(B,R)*. Poco male, si dirà. Dopotutto, è già stato fatto notare che tipicamente un gioco ha più di un equilibrio. Da questo punto di vista, il nostro gioco non ha nulla di speciale, così come è "normale" che un giocatore preferisca un equilibrio (I preferisce *(T,L)*) e l'altro vorrebbe invece che venisse giocato l'altro.
Il guaio si rende evidente se andiamo a leggere nella forma estesa cosa "significano" questi due equilibri. *(B,R)* non sembra in effetti molto plausibile. Perché I dovrebbe scegliere B se sa che, qualora toccasse a lui, II sceglierebbe L che gli dà un *payoff* pari a 2, mentre B gli dà un *payoff* pari a 1?
Potremmo cercare di trovare una "ragione" per questo curioso equilibrio di Nash, immaginando che i due giocatori si siano parlati prima e siano giunti all'accordo di giocare *(B,R)*. L'argomentazione che II potrebbe aver portato, per sostenere questa scelta, potrebbe essere stata una sorta di minaccia nei confronti di I: se tu giochi T, io giocherò R; quindi, *stai attento*! Il guaio è che si tratta di una minaccia scarsamente credibile visto che, nel contesto in cui siamo, non vi sono nerboruti e mingherlini. L'unica "forza" dei giocatori è l'intelligenza che assumiamo abbiano entrambi in

quantità spropositata. Ciò detto, la credibilità di una minaccia di questo genere è nulla.

Ovviamente sarebbe "carino" avere a disposizione qualche concetto generale che ci permettesse di discriminare fra gli equilibri, senza dover ricorrere ogni volta ad una analisi *ad hoc*. Questo concetto generale c'è ed è dovuto a Selten: si tratta dell'idea di *equilibrio perfetto nei sottogiochi*. L'idea è semplice da esprimere (anche se, per giochi un po' complessi, vi sono dei dettagli di cui tener conto): la coppia di strategie non solo deve essere un equilibrio di Nash per il gioco ma deve rimanere tale anche ogni sua *restrizione* ad ogni *sottogioco*. Nel nostro caso, la scelta di *II* deve essere ottimale (per lui) nel sottoalbero che inizia con il "suo" nodo: un equilibrio di Nash, nel caso speciale in cui vi sia un solo giocatore coinvolto, non è altro che un punto di massimo per il *payoff* di codesto giocatore. Ciò non si verifica per l'equilibrio *(B,R)* che, per l'appunto, prevede una scelta non ottimale di *II* in un nodo dell'albero e pertanto non è perfetto nei sottogiochi. L'idea degli equilibri perfetti nei sottogiochi permette così di eliminare l'equilibrio di Nash poco attendibile che avevamo trovato.

A dire il vero, il contributo di Selten è ben più dirompente. Se bisogna guardare i sottogiochi, ciò significa che la forma estesa è indispensabile, contrariamente a quanto asserito da von Neumann, o che l'equilibrio di Nash non riesce a cogliere tutte le "sfumature" necessarie.

22

Il contributo di Selten, non a caso, apre una nuova linea di investigazione: "raffinare" le condizioni imposte ad una coppia di strategie perché possa essere considerata una soluzione attendibile. Il contributo successivo sarà ancora di Selten, dieci anni dopo la sua proposta riguardante gli equilibri perfetti nei sottogiochi. Selten ritorna sulla questione, approntando uno strumento che permette di imporre ulteriori restrizioni all'equilibrio di Nash *in un gioco in forma strategica*.

La giustificazione addotta da Selten per poter scartare alcuni equilibri di Nash va sotto il nome di *trembling hand (argument)*. L'idea è che un giocatore, pur se sceglie una strategia, diciamo T, non è sicuro al 100% che effettivamente userà proprio quella. Per capire la logica del discorso, si supponga che il giocatore abbia davanti a sé due pulsanti. Uno è il pulsante B, l'altro è T. Pur se il giocatore ha deciso di schiacciare il pulsante T, non si può escludere che (per una qualsivoglia ragione) non schiacci in effetti il pulsante B. Naturalmente, questo sarà un evento che accadrà con una probabilità piccolissima, quasi infinitesima. L'idea non è particolarmente esotica: ognuno, nella sua esperienza di vita, ha avuto episodi in cui ha commesso errori che sembrerebbe impossibile poter commettere, anche se si tratta di eventi rari. La traduzione formale di questa idea è abbastanza semplice e cerca proprio di rendere l'idea che la possibilità di errore sia infinitesima. Richiede, infatti, un'operazione di passaggio al limite ovvero di far andare a zero la probabilità di errore. Come è forse già evidente da queste parole, verranno scartati gli equilibri di Nash che mostrano una sorta di discontinuità, nel senso che non possono essere trovati come limiti di equilibri "con errore", quando l'errore viene fatto convergere a zero.

Per vedere i dettagli della definizione, ci serve l'idea di un gioco sul continuo (i "passaggi al limite" fatti su una struttura discreta difficilmente sono interessanti). Più precisamente, ci occuperemo della estensione mista di un gioco finito (a due giocatori, sempre).

Dato un gioco $G = (X, Y, f, g)$, supporremo per comodità che sia $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. L'estensione mista di G, indicata come Γ, è così definita: lo spazio delle strategie per I è l'insieme di tutte le probabilità su X e quindi una strategia per I è una m-pla di numeri reali $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, maggiori o uguali a zero e la cui somma è uguale a 1. Analogamente per II: $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. I *payoff* sono i "*payoff* attesi", data la probabilità prodotto:

$$\hat{f}(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j f(x_i, y_j)$$

$$\hat{g}(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j g(x_i, y_j).$$

La definizione di *equilibrio perfetto* è la seguente. Scelti $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tutti positivi, si indichi con $(p_\delta, q_\varepsilon)$ un equilibrio di Nash per Γ l'estensione mista del gioco in cui il giocatore I è obbligato ad usare la sua strategia i-esima con probabilità almeno pari a δ_i (e analogamente per II). Ebbene, un equilibrio di Nash per si dirà perfetto ("*trembling hand perfect*") se è limite di equilibri del tipo $(p_\delta, q_\varepsilon)$ per ε, δ che tendono a 0.

Un esempio molto semplice mostra la differenza. Basta considerare il gioco G dato dalla seguente matrice:

I \ II	*L*	*R*
T	(1,1)	(0,0)
B	(0,0)	(0,0)

Per informazioni più dettagliate sulla storia del premio Nobel, sui recenti vincitori e, in particolare, sui premi Nobel per l'Economia del 2007 Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin e Roger B. Myerson, si veda il sito ufficiale http://nobelprize.org.

Se prendiamo $\delta_T = \delta_B = \varepsilon_L = \varepsilon_R = \gamma$ e facciamo tendere γ a 0, la coppia di strategie $((1-\gamma,\gamma), (1-\gamma,\gamma))$ è un equilibrio per il gioco "ristretto", che ovviamente tende alla coppia di strategie miste ((1,0),(1,0)), che corrisponde all'equilibrio *(T,L)* del gioco G dato. È invece impossibile approssimare l'equilibrio *(B,R)* con equilibri del gioco ristretto in quanto in questo gioco "ristretto" un equilibrio utilizzerà solo la minima probabilità consentita sulla strategia B (rispettivamente, R).

A favore di questo *raffinamento* va subito accreditato un fatto importante: si dimostra (grazie al teorema di Nash e con qualche ragionamento standard che usa la compattezza) che, per *ogni* gioco finito, l'estensione mista ha almeno un equilibrio perfetto. Tra l'altro, come ci si attende, un equilibrio perfetto è un equilibrio di Nash. Insomma, sembra proprio di poter dire che è stata trovata una buona idea di *raffinamento* dell'equilibrio di Nash. Resta da chiedersi se non capiti che, per qualche gioco, vi siano degli equilibri perfetti anch'essi poco plausibili.

La risposta non può essere altro che sì, visto che oltretutto il protagonista, citato all'inizio, deve ancora entrare in scena. Myerson ha fornito un ulteriore raffinamento degli equilibri perfetti, introducendo gli *equilibri propri*.

Cosa ci sia che non va negli equilibri perfetti, lo si vede da questo esempio:

I \ II	L	R	Z
T	(1,1)	(0,0)	(-9,-9)
B	(0,0)	(0,0)	(-7,-7)
W	(-9,-9)	(-7,-7)	(-7,-7)

È l'esempio di prima, cui sono state aggiunte righe e colonne "pessime" dal punto di vista di entrambi i giocatori. La novità ha un effetto spiacevole per quanto riguarda gli equilibri perfetti. Infatti, l'equilibrio *(B,R)* diventa anch'esso perfetto (come *(T,L)* che già lo era nell'altro gioco e che, bontà sua, lo rimane anche in questo).

Di per sé, il fatto che – modificando un gioco – gli equilibri perfetti ne possano "risentire" non è certo sconvolgente. Il guaio è che le strategie aggiunte, essendo "pessime", ci fanno ritenere che non dovrebbero essere rilevanti [2] nello "spostare" le proprietà dei due equilibri che avevamo. È invece fastidioso pensare che sia cambiato così tanto da giustificare che spunti fuori anche *(B,R)* come equilibrio perfetto.

Il problema è stato risolto da Myerson, la cui idea è doppiamente "carina". Lo è in quanto riesce ad eliminare l'equilibrio fastidioso. Ma lo è ancor di più perché resta nella stessa logica da "mano tremante". Semplicemente la *raffina*! A tutti sarà capitato di voler prendere la cosa A e di aver invece preso la cosa B, per sbaglio. Ma se la cosa B fosse stata un cobra, probabilmente ci si stava "doppiamente attenti". Bene, Myerson non fa altro che formalizzare questa semplice idea.

Ogni giocatore è sempre "obbligato" a giocare con probabilità positiva ognuna delle sue strategie. Ma si *richiede* che gli *epsilon* e i *delta*, che disciplinano l'uso di queste probabilità dovute ad errore, siano più piccoli (nel senso che vadano a zero più rapidamente) per le strategie peggiori. Questa idea, adeguatamente formalizzata, è l'idea di equilibrio proprio. Che è un ulteriore, interessante, raffinamento dell'equilibrio di Nash (e degli equilibri perfetti). Va da sé che Myerson ha provato anche che, per ogni gioco finito, l'estensione mista ha sempre almeno un equilibrio proprio. Nell'ultimo esempio, solo *(T,L)* è equilibrio proprio.

Arrivato alla fine, è giusto che "confessi" perché ho scelto questo argomento. La ragione è che Myerson ha scritto uno stupendo libro di Teoria dei giochi, che è un piacere leggere e rileggere. Allora, volevo approfittare dell'occasione per rendere un piccolo omaggio all'autore. ■

Ulteriori info nel file SPE_e_perfetti.pdf, reperibile nel sito: http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm.
Il libro di Myerson citato è:
Myerson Roger B., *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge (MA), 1991.
Un testo tecnico di riferimento sui raffinamenti dell'equilibrio di Nash è:
van Damme Eric E.C., *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Springer, Berlino, 1987.

Note

[1] A due giocatori. Quello che faremo si può estendere a n giocatori senza modifiche, se non puramente notazionali. Vi è in realtà una proprietà interessante, che riguarda gli equilibri perfetti, per la quale "fa differenza" se i giocatori sono due o più di due. Ma non avremo occasione di parlarne, per cui lasciamo da parte i giochi con più di due giocatori.

[2] Dovrebbero essere delle "alternative irrilevanti", per usare un termine chiave in Teoria dei giochi, Scelte sociali e Teoria dei meccanismi. Crocevia del teorema di impossibilità di Arrow, strumento essenziale per il modello di contattazione di Nash, cruciale per la implementabilità o meno di funzioni di scelta sociali.