Re Salomone era saggio o ha avuto fortuna?

di **Fiorante Patrone**

Spero di non stupire nessuno se dico che gli scacchi, il *backgammon*, il *poker*, ecc., non sono giochi nel senso tecnico che viene assegnato a questo temine in teoria dei giochi (*TdG*). Sono invece esempi di *game form*, ovvero esempi di *meccanismi*. Per esempio, le regole degli scacchi, codificate dalla *F.I.D.E.*, identificano per l'appunto ciò che in *TdG* viene chiamato *meccanismo*. Immagino che, a questo punto, sia chiaro che il termine *meccanismo* identifica le *regole del gioco*. Cosa manca per avere un gioco? Mancano le *preferenze* dei giocatori rispetto agli *esiti* del gioco.

In situazioni dove l'esito del gioco è solo vincere, perdere o pareggiare, possiamo immaginare (pur con le dovute cautele) che i giocatori abbiano preferenze contrapposte rispetto a questi esiti. Tanto è vero che c'è l'abitudine diffusa di indicare con i *payoff* 1, 0, -1, il valore di utilità che i giocatori assegnano rispettivamente alla vittoria, pareggio o sconfitta (anche se – osservo incidentalmente – questa assunzione non è completamente indolore, presupponendo una ben specifica "attitudine" dei giocatori rispetto al rischio). Va da sé che esistono moltissime situazioni nelle quali non abbiamo alcuna possibilità di identificare le preferenze (per così dire, *normali*) a partire dalle regole del gioco.

Torniamo alle *regole del gioco*. Essere consapevoli che un gioco può essere scomposto in due parti indipendenti (il *meccanismo* e le *preferenze dei giocatori*) è molto importante. Tanto è vero che ci occupiamo qui di cosa succede quando guardiamo la questione in un'ottica speculare rispetto a quanto detto prima. Cosa intendo? Semplice. Supporrò che siano dati i (potenziali) giocatori di un gioco, con le loro preferenze. Supponiamo che stia a noi (che *non conosciamo* le preferenze dei giocatori) *poter scegliere* il meccanismo. Possiamo sceglierlo in modo da ottenere che il risultato del gioco sia *quello che noi vogliamo*? In subordine, possiamo scegliere il meccanismo migliore tra quelli possibili. Naturalmente, parliamo di *migliore* rispetto al nostro criterio di valutazione.

Esempi? Basta guardarsi attorno! Io, Governo, come riesco a far pagare le tasse? Come riusciamo a stabilire chi sia il miglior pilota di *Formula 1*? Ha senso ricorrere ad un'asta, e di che tipo, se vogliamo vendere un quadro? Come congegnamo le regole di un *tracker* dedicato al *file sharing* in modo da massimizzare il numero di *bit* scambiati?

La risposta a questo tipo di domande è di competenza di quella parte di *TdG* dedicata al *mechanism design*. Come funziona questo "pezzo" di *TdG*? È molto facile descriverne l'idea di fondo. Tipicamente, potrò scegliere un meccanismo m da un insieme M di meccanismi ammissibili. Individuato un meccanismo m, tenendo conto di chi sono i giocatori e delle loro caratteristiche (le loro preferenze, *in primis* ma anche, per esempio, l'informazione a loro disposizione!), mi posso aspettare che combinando assieme questi dati con un meccanismo m, scaturisca un certo esito $e(m)$ che speriamo sia l'esito da noi desiderato. Naturalmente, alle spalle ci saranno anche assunzioni (sperabilmente appropriate) sulla razionalità e intelligenza dei giocatori, che userò per giustificare il fatto che mi attendo che "giochino", ad esempio, strategie di equilibrio (ad esempio, equilibrio di Nash).

Come detto, un problema importante che deve affrontare il *mechanism designer* è la non conoscenza di alcuni parametri rilevanti dei giocatori che si troveranno ad interagire nella *game form* che avrà approntato. Tipicamente, avrà una informazione parziale sulle *preferenze* dei giocatori, cosa che spesso avverrà anche per quanto riguarda le conoscenze reciproche tra i giocatori di queste caratteristiche. Si pensi alle aste: nella situazione che spesso è usata come prototipo per illustrare la problematica, il venditore di un quadro non conosce la valutazione che ne hanno i potenziali partecipanti all'asta. Ciò che accade, spesso, è che tale informazione non sia a conoscenza (reciproca) neppure dei partecipanti. Da ciò scaturisce che, non a caso, lo strumento tipicamente utilizzato per analizzare questo problema è quello dei cosiddetti giochi ad informazione incompleta (con il corrispondente concetto di soluzione che è il cosiddetto *equilibrio Nash-bayesiano*). In taluni casi, può tuttavia accadere che invece siano ben noti ai partecipanti alla *game form* le loro preferenze, che sono ignote al *designer*.

Un esempio tipico di questa situazione è fornito dalla storia biblica di Re Salomone [1Re 3,16-28] che, posto di fronte a due donne entrambe reclamanti un bambino come loro figlio, fece la proposta di dividerlo a metà con la conseguente reazione "rivelatrice" da parte di una delle due donne. Bene, questa è la storia. Ma il racconto biblico è proprio la fine della storia? Sembrerebbe di no. Dopotutto, se la falsa madre fosse stata di cervello abbastanza fine (e sveglia di riflessi), avrebbe potuto reagire anche lei come la vera madre.

Cosa ci dice la teoria del *mechanism design* a questo proposito? Supponiamo che Re Salomone possa scegliere una *game form* a suo piacimento, con il vincolo che prevede una scelta contemporanea da parte delle due donne. Ebbene, è *impossibile* inventare una *game form* che possa avere come conseguenza (in equilibrio di Nash) che il figlio sia assegnato alla vera madre.

Formalizziamo un po'. Abbiamo due donne, la donna 1 e la donna 2, e un insieme di esiti: $E = \{a,b,d\}$. L'esito a (rispettivamente: b) vuol dire che il bambino è dato alla donna 1 (risp.: 2). L'esito d corrisponde a dividere il bambino in due.

I casi possibili sono due: lo "stato di natura" è s, in cui la vera madre è la donna 1, oppure t (la vera madre è la donna 2). Re Salomone non sa quale sia il vero stato di natura che, invece, è conoscenza comune fra le due donne. Che dire delle preferenze dei giocatori (le due donne)? Lo stato di natura determina quali siano le loro preferenze, che supponiamo siano le seguenti (in accordo con la storia biblica):

$$a \succ^1_s b \succ^1_s d \quad \text{e} \quad b \succ^1_s d \succ^2_s a$$

$$a \succ^1_t d \succ^1_t b \quad \text{e} \quad b \succ^2_t a \succ^2_t d$$

L'indice in alto individua la donna, mentre quello in basso riguarda lo "stato di natura". Per comodità, rappresentiamo le preferenze mediante funzioni di utilità (assegnando valori via via decrescenti alle alternative, da quella maggiormente preferita a quella peggiore). Possiamo scegliere, ad esempio (u riguarda la donna 1 e v la donna 2):

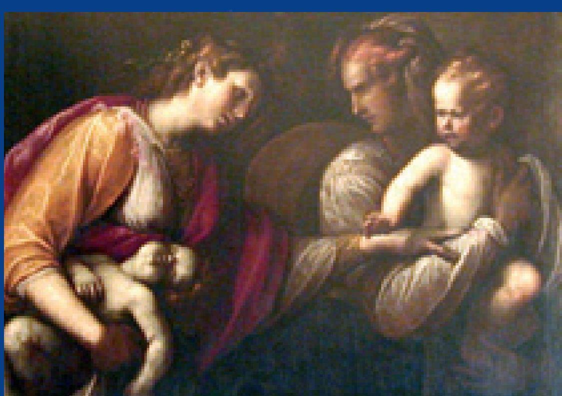
Il giudizio di Re Salomone

Un giorno andarono dal re due prostitute e si presentarono innanzi a lui. Una delle due disse: "Ascoltami, signore! Io e questa donna abitiamo nella stessa casa; io ho partorito mentre essa sola era in casa. Tre giorni dopo il mio parto, anche questa donna ha partorito; noi stiamo insieme e non c'è nessun estraneo in casa fuori di noi due. Il figlio di questa donna è morto durante la notte, perché essa gli si era coricata sopra. Essa si è alzata nel cuore della notte, ha preso il mio figlio dal mio fianco - la tua schiava dormiva - e se lo è messo in seno e sul mio seno ha messo il figlio morto. Al mattino mi sono alzata per allattare mio figlio, ma ecco, era morto. L'ho osservato bene; ecco, non era il figlio che avevo partorito io". L'altra donna disse: "Non è vero! Mio figlio è quello vivo, il tuo è quello morto". E quella, al contrario, diceva: "Non è vero! Quello morto è tuo figlio, il mio è quello vivo".

Discutevano così alla presenza del re. Egli disse: "Costei dice: Mio figlio è quello vivo, il tuo è quello morto e quella dice: Non è vero! Tuo figlio è quello morto e il mio è quello vivo". Allora il re ordinò: "Prendetemi una spada!". Portarono una spada alla presenza del re.

Quindi il re aggiunse: "Tagliate in due il figlio vivo e datene una metà all'una e una metà all'altra".

La madre del bimbo vivo si rivolse al re, poiché le sue viscere si erano commosse per il suo figlio, e disse: "Signore, date a lei il bambino vivo; non uccidetelo affatto!". L'altra disse: "Non sia né mio né tuo; dividetelo in due!". Presa la parola, il re disse: "Date alla prima il bambino vivo; non uccidetelo. Quella è sua madre". Tutti gli Israeliti seppero della sentenza pronunciata dal re e concepirono rispetto per il re, perché avevano constatato che la saggezza di Dio era in lui per render giustizia.



Le due donne del giudizio di Salomone, Guglielmo Caccia detto il Moncalvo (1568 - 1625) Inizio sec. XVII, Fondazione D'Arco, Mantova

$u(a,s) = 2,\ u(b,s) = 1,\ u(d,s) = 0$ e $v(b,s) = 2,\ v(d,s) = 1,\ v(a,s) = 0$

$u(a,t) = 2,\ u(d,t) = 1,\ u(b,t) = 0$ e $v(b,t) = 2,\ v(a,t) = 1,\ v(d,t) = 0$

Re Salomone ha un ovvio obiettivo, che intende perseguire, sintetizzabile con una funzione $f: \{s,t\} > E$ che naturalmente sarà definita da $f(s) = a$, $f(t) = b$. Tecnicamente, stiamo parlando di una *funzione di scelta sociale*. La difficoltà di Re Salomone è che non sa quale sia lo stato di natura (mentre – come detto – le due donne lo sanno; anzi, è conoscenza comune tra loro). Ma Re Salomone ha un potere rilevante: può scegliere quale *game form* far giocare alle due donne. Come detto, supponiamo che la sua scelta sia limitata alle *game form* in forma strategica. Detto in breve, le due donne dovranno effettuare le loro scelte (ad esempio, le loro dichiarazioni) contemporaneamente, non in sequenza.
Nella Bibbia, Re Salomone c'è riuscito. Ma, forse, solo perché la falsa madre non è stata abbastanza sveglia. Ci riuscirebbe con i classici decisori (iper)intelligenti, presupposti dalla TdG? La risposta è semplice. No.
Un teorema, dovuto a Maskin, dice che condizione *necessaria* per poter implementare una funzione di scelta sociale come equilibrio di Nash di un gioco in forma strategica è che tale funzione soddisfi una condizione, detta *Maskin monotonicity*, che *non* è soddisfatta dalla nostra f. Abbiamo infatti che l'alternativa individuata dalle funzioni di scelta sociale è a nello stato s ed invece non lo è più nello stato t, senza che ci sia alcuna alternativa c ed alcun giocatore che preferisca a a c nello stato s mentre preferisce strettamente c ad a.
Per curiosità, possiamo vedere cosa accade con una *game form* che sembra ricordare la storia biblica. Le strategie a disposizione dei due giocatori sono $\{x_1, x_2, x_3\}$ e $\{y_1, y_2, y_3\}$. Volendo, possiamo leggere le strategie come delle dichiarazioni: x_1 vuol dire "mio", x_2 "suo", x_3 "mio, ma se anche l'altra lo reclama, datelo a lei" (e similmente per l'altro giocatore, la donna 2).

1/2	y_1	y_2	y_3
x_1	d	a	a
x_2	b	d	b
x_3	b	a	d

Se teniamo conto delle preferenze delle due donne (rappresentate con le funzioni di utilità sopra indicate), per ciascuno dei due stati di natura otteniamo due giochi in forma strategica:
stato di natura s:

1/2	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,1)	(2,0)	(2,0)
x_2	(1,2)	(0,1)	(1,2)
x_3	(1,2)	(2,0)	(0,1)

stato di natura t:

1/2	y_1	y_2	y_3
x_1	(1,0)	(2,1)	(2,1)
x_2	(0,2)	(1,0)	(0,2)
x_3	(0,2)	(2,1)	(1,0)

Ora, i due giochi precedenti hanno due equilibri di Nash ciascuno (per tabelle come queste, una cella rappresenta un equilibrio di Nash se il primo numero è il massimo sulla colonna ed il secondo è il massimo per la riga) . Essi sono, nello stato di natura s: (x_1, y_1), (x_2, y_1); nello stato di natura t: (x_1, y_2), (x_1, y_3). Peccato che l'esito indotto dagli equilibri sia b nello stato s ed a nello stato t. L'esatto contrario di quello che voleva Re Salomone. Naturalmente questo è solo un esempio e non prova certo la tesi! Ma c'è il teorema di Maskin – come detto – che garantisce come sia *impossibile* ottenere il risultato desiderato. L'esempio serve anche per fare due osservazioni.
La prima. Non potrebbe, Re Salomone, dire che la *game form* è quella descritta e poi "rovesciare" il risultato? Beh, sì. Ciò si collocherebbe al di fuori del nostro ambito di analisi, che assume come la *game form* (esattamente come espressa) rappresenti un impegno *irrevocabile* di colui che la può scegliere. Non che non si possano trattare questi "trucchi". Solo che ci si pone in un diverso contesto, nel quale gli aspetti reputazionali sono rilevanti, come ben si può immaginare (e, dal punto di vista reputazionale, non si può dire che Re Salomone si trovi in una situazione comoda: può scegliere se riaffermare il suo rispetto della parola data, importantissimo per un Re che svolga anche il ruolo di giudice, oppure evitare un esito orribile).
Seconda osservazione. Abbiamo dato un "significato" alle tre strategie a disposizione dei giocatori ma questo è puro "fumo negli occhi". Non ha nessuna importanza quale sia il significato letterale delle stringhe usate per identificare le strategie. L'unica cosa che importa è la mappa che definisce la *game form*, ovvero come le scelte dei giocatori (indipendentemente dal *nome* che hanno) determinano gli esiti previsti nella *game form*.
Fine della storia? Sì e no. Nella prossima puntata vedremo un altro punto di vista. Tra l'altro, proporremo, cinicamente, di mettere all'asta il bambino. Alla fin fine, una qualche soluzione la troveremo... ■