Dire quel poco che basta

di **Fioravante Patrone**

QUESTA RUBRICA avrebbe dovuto essere dedicata ad un tema diverso, ma l'assegnazione del premio Nobel a Robert J. Aumann e Thomas C. Schelling mi ha indotto ad effettuare un rapido "cambiamento di rotta". Parlerò quindi di *equilibri correlati*, un concetto di soluzione per giochi non cooperativi introdotto da Aumann in un articolo del 1974. L'articolo è stato pubblicato sul *primo* fascicolo del *Journal of Mathematical Economics*, la cui nascita attestava il ruolo sempre più rilevante che strumenti matematici – anche molto sofisticati – avevano assunto all'interno della teoria economica. Uno dei principali ispiratori di questa rivista è stato Gerard Debreu, altro matematico insignito del premio Nobel per l'Economia, scomparso recentemente (31 dicembre 2004).

Ma passiamo alla "sostanza". Avremo bisogno, naturalmente, di un gioco non cooperativo (a due giocatori, per avere notazioni più leggere) in forma strategica. Avremo cioè un insieme X che indica le possibili scelte (strategie) per I e un insieme Y con funzione analoga per II. Oltre a questo, abbiamo due funzioni reali (dette *payoff*) $f,g : X \to Y \quad \mathbb{R}$ che descrivono le valutazioni dei risultati da parte dei due giocatori. Quindi, un gioco non cooperativo è una quaterna $G = (X,Y,f,g)$.

Come ormai sanno in tanti (anche per "colpa" di *A Beautiful Mind*), il principale concetto di *soluzione* per un gioco non cooperativo è dato dall'*equilibrio di Nash*, che per definizione è una coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tale che:

$$(1) \quad f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X$$
$$(2) \quad g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \text{ per ogni } y \in Y$$

Ora, uno dei problemi più gravi di cui soffre questa soluzione è la non unicità dell'equilibrio, che è un fenomeno piuttosto frequente. L'esempio classico in merito è dato dalla cosiddetta *battaglia dei sessi* che è descritta dalla seguente tabella ($X = \{T, B\}$, $Y = \{L, R\}$):

I \ *II*	*L*	*R*
T	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

Ciò che rende interessante questo gioco non è certo la storiellina che si può raccontare per introdurlo (e che gli dà il nome) ma proprio il fatto che ha due equilibri di Nash: *(T, L)* e *(B, R)*. Il che diminuisce di molto il valore predittivo di questo concetto di soluzione, in particolare per un gioco di questo tipo. È evidente quale sia il tipo di situazione descritta da questo gioco: siamo di fronte a due individui con interessi parzialmente allineati ma anche parzialmente contrapposti. Un modo per "uscire" da questo piccolo dilemma potrebbe essere quello di affidarsi parzialmente alla sorte per prendere una decisione. Se assumiamo che l'interesse dei giocatori sia quello di massimizzare il loro payoff *atteso*, possiamo utilizzare l'idea di strategia mista e di equilibrio in strategie miste.

In effetti, il gioco ha anche un equilibrio in cosiddette *strategie miste*, il quale prevede che il giocatore I giochi T con probabilità *2/3* e B con probabilità *1/3*, mentre II gioca L con probabilità *1/3* e R con probabilità *2/3*. Per avere una idea "concreta" di che cosa significhi, si può pensare che I usi un dado per scegliere la strategia da usare: se, lanciato il dado, viene *1* oppure *2*, sceglierà T; se viene un altro numero, sceglierà B. Similmente per II. Peccato, però, che il risultato atteso sia un po' deludente: ad esempio, il guadagno atteso per I sarà pari a: $2/9 \cdot 2 + 4/9 \cdot 0 + 1/9 \cdot 0 + 2/9 \cdot 1 = 2/3$. Si noti che i conti fatti presuppongono, come previ-

sto in modo standard quando si parla di strategie miste, che i giocatori utilizzino meccanismi aleatori *indipendenti* (in parole povere: ognuno usa il suo dado).
Possono far di meglio? Non c'è bisogno della Teoria dei giochi per scoprire una buona idea. I due giocatori potrebbero usare una moneta (*una sola moneta che serve per entrambi*): la lanciano e, se viene testa, *I* gioca *T* e *II* gioca *L*; se viene croce, *I* gioca *B* e *II* gioca *R*. Se questo è possibile (dobbiamo supporre che i due giocatori possano comunicare tra loro!), il *payoff* atteso è, per entrambi, pari a *3/2*. Un risultato buono, tutto sommato, dato il contesto.
Possiamo accettare questa idea come soluzione per la *battaglia dei sessi*? Essa non corrisponde ad un equilibrio di Nash in strategie miste, visto che i giocatori non usano meccanismi aleatori indipendenti. Ora, la nozione di equilibrio di Nash cerca di tenere conto del fatto che, quando si parla di gioco non cooperativo, ci si riferisce ad una situazione in cui non sono possibili accordi vincolanti (in effetti, la definizione di equilibrio di Nash si presta ad una interpretazione come condizione di stabilità per un accordo non vincolante: le precedenti condizioni (1) e (2) dicono che nessuno dei giocatori ha ragione di "deviare" rispetto all'accordo raggiunto).
E allora? La risposta ce la dà Aumann: l'idea (non particolarmente peregrina) corrisponde ad un *equilibrio correlato*. Cioè, ad un nuovo concetto di soluzione, introdotto per l'appunto da Aumann nel 1974.

Un modo semplice per comprendere la differenza tra l'idea di equilibrio di Nash e quella di equilibrio correlato sta nel fatto che la definizione di quest'ultimo è strutturata in modo tale da tenere conto del fatto che per i giocatori vi è la possibilità di comunicare tra loro e di correlare, per l'appunto, le loro scelte. Questo aspetto è invece completamente ignorato nella definizione di equilibrio di Nash (i giocatori "in carne ed ossa" possono ricorrere a tutti gli espedienti per riuscire a correlare le loro scelte, anche in assenza di possibilità di comunicare: la idea di "punto focale", dovuta all'altro fresco premio Nobel, Schelling, si occupa proprio di questo problema).[1]
D'altro canto, se vogliamo accettare l'idea di Aumann come soluzione per un gioco non cooperativo, dobbiamo verificare che corrisponda ad un accordo "stabile" di per sé, visto che non sono ammessi accordi vincolanti.
Nell'esempio della *battaglia dei sessi*, tenendo conto del tipo di gioco che si trovano a giocare, pensare che i giocatori rispettino – per così dire – la sentenza del fato, cioè si adeguino alle scelte previste sulla base dell'esito emerso dal lancio della moneta, mi sembra piuttosto ragionevole. Da dove viene questa stabilità? Da un fatto molto semplice: le *coppie* di strategie che i giocatori sono chiamati ad "implementare" rappresentano, per ciascuno dei due esiti possibili del lancio della moneta, *equilibri di Nash*! Una volta che ci si rende conto di questo, diventa banale generalizzare a un qualsiasi gioco non cooperativo quanto visto nel caso della *battaglia dei sessi*.

Seguendo questa strada, arriviamo ad ottenere solo una classe molto particolare di quelli che sono gli equilibri correlati, come definiti da Aumann. Per rendere l'idea di cosa ci sia di più, farò ricorso ad un secondo esempio, simile alla *battaglia dei sessi* ma con una caratteristica che ci permette di andare oltre la semplice idea che abbiamo illustrato e che, tra l'altro, giustifica il titolo dato a questa Nota. Consideriamo il gioco:

I \ II	*L*	*R*
T	(6, 6)	(2, 7)
B	(7, 2)	(0, 0)

Anche qui abbiamo due equilibri di Nash: *(B,L)* e *(T,R)*, ai quali si aggiunge un equilibrio in strategie miste che dà a entrambi i giocatori un *payoff* atteso pari a *14/3*.
Ora, se i giocatori potessero accordarsi sul giocare *(B,L)*, *(T,L)* e *(T,R)* con probabilità pari ad *1/3* ciascuno, otterrebbero un *payoff* atteso pari a *(7+6+2)/3 = 5* ciascuno. Un guadagno non stratosferico, ma comunque un risultato migliore di quello che possono ottenere dall'equilibrio di Nash in strategie miste. Peccato, però, che *(T,L)* non sia un equilibrio di Nash e quindi non è ovvio come questo accordo possa essere ritenuto stabile, se non è vincolante.
Vedremo invece che a questo si può giungere. Ma i due giocatori devono fare ricorso ad un mediatore affidabile (che può anche essere un semplice programmino di calcolatore), il quale "lanci" il dado e comunichi ai due giocatori solo una informazione *parziale* sul risultato del meccanismo aleatorio. La regola è semplice da descrivere. Ad esempio, è sufficiente un dado per "metterla in pratica". Vogliamo ottenere il seguente comportamento da parte dei due giocatori:

- se dal dado esce *1* o *2*, *I* gioca *B* e *II* gioca *L*
- se dal dado esce *3* o *4*, *I* gioca *T* e *II* gioca *L*
- se dal dado esce *5* o *6*, *I* gioca *T* e *II* gioca *R*

Se ci riusciamo, otteniamo proprio il *payoff* (atteso) desiderato. Allora, basta che questa convenzione sia fissata in anticipo dai giocatori. Però, attenzione: i giocatori la rispetteranno solo se sarà loro conveniente farlo (ricordiamoci che non stiamo supponendo che gli accordi fra giocatori siano

I Nobel per l'economia del 2005

Quest'anno la *Royal Swedish Academy of Sciences* ha deciso di assegnare il premio per le Scienze economiche della Banca di Svezia (in memoria di Alfred Nobel) a Robert J. Aumann, della Hebrew University di Gerusalemme, e a Thomas C. Schelling del Dipartimento di Economia dell'Università del Maryland. La motivazione del premio ai due economisti è la seguente: "per aver migliorato la nostra comprensione riguardo i conflitti e la cooperazione utilizzando la Teoria dei giochi".

Conflitti e cooperazione attraverso la lente della Teoria dei giochi.

"La guerra e altri conflitti sono tra le principali cause della miseria umana. Un minimo di cooperazione è il prerequisito per una società prospera". Così inizia la dichiarazione dell'Accademia delle Scienze svedese sottolineando, con queste poche parole, l'importanza di questo riconoscimento.

Perchè alcuni gruppi di individui, organizzazioni e Paesi riescono a promuovere la cooperazione mentre altri soffrono a causa dei conflitti? Il lavoro di Robert Aumann e Thomas Schelling ha definito la Teoria dei giochi – o Teoria delle decisioni interattive – come l'approccio dominante a questo vecchio dilemma.

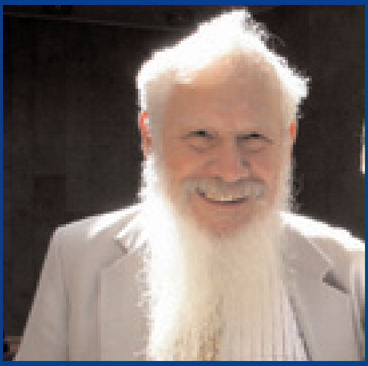
Thomas Schelling

Sullo sfondo della corsa agli armamenti nucleari, verso la fine degli anni Cinquanta, il libro di Thomas Schelling *The Strategy of Conflict* definì la sua visione della Teoria dei giochi come un quadro unificante per le Scienze sociali. Schelling mostrò che le capacità di rappresaglia possono essere più utili delle abilità a resistere a un attacco e che una rappresaglia incerta è più credibile e efficiente di una certa. Tali presupposti si sono dimostrati di grande rilevanza per la risoluzione dei conflitti e per evitare la guerra.

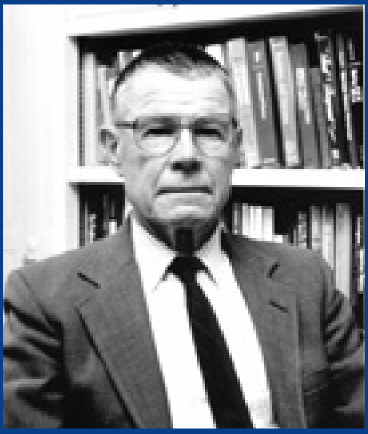
Il lavoro di Schelling ha stimolato nuovi sviluppi nella Teoria dei giochi e ne ha accelerato l'applicazione nelle Scienze sociali. In particolare, ha analizzato l'importanza strategica della capacità di assumere impegni vincolanti, permettendo di comprendere un ampio spettro di fenomeni, dalle strategie competitive delle aziende alla delega del potere decisionale in politica.

Robert Aumann

In molte situazioni reali, la cooperazione può essere più semplice da sostenere in relazioni a lungo termine che in singoli incontri. L'analisi degli *one-shot games* sono, quindi, spesso troppo restrittive. Robert Aumann è stato il primo a condurre un'analisi formale dei cosiddetti *infinitely repeated games* (giochi infinitamente ripetuti). La sua ricerca ha identificato esattamente quali risultati si possono ottenere in relazioni sul lungo periodo. La teoria dei *repeated games* incrementa la nostra comprensione dei prerequisiti per la cooperazione. L'approccio inoltre chiarisce la ragion d'essere di molte istituzioni, dai trattati commerciali internazionali fino al crimine organizzato.



Robert Aumann



Thomas Schelling

vincolanti). Quindi se, ad esempio, il fatto che dal dado è venuto fuori *3* o *4* è una informazione *pubblica*, ci troviamo di fronte ad un accordo instabile. Il comportamento prescritto in tal caso dall'accordo *non* corrisponde ad un equilibrio di Nash e quindi, per l'appunto, l'accordo è instabile.

Il "mediatore affidabile" ci serve proprio per superare que-

sto problema. Il suo scopo è quello di comunicare l'indicazione di quale strategia usare (a seconda del numero "uscito" dal dado) *separatamente* ai due giocatori. E, soprattutto, in modo che l'altro non senta.
Quindi, se dal dado è uscito ad esempio *2*, il mediatore dirà a *I* "in un orecchio" di giocare *B* e bisbiglierà a *II* di giocare *L*. Analogamente, se esce *3*, dirà a *I* di giocare *T* e a *II* di giocare *L*.
Attenzione, però. I due giocatori sono *intelligenti* e conoscono la regola che il mediatore sta usando (se il "mediatore" è un programmino di calcolatore, possiamo pensare che l'abbiano scritto assieme). Allora, se *I* si sente bisbigliare che deve giocare *B*, capisce subito che è uscito *1* o *2* dal dado (sono gli unici casi in cui il mediatore è tenuto a dirgli di giocare *B*) e quindi *I deduce* che a *II* è stato detto di giocare *L*. Ma, nessun problema: *(B,L)* è un equilibrio di Nash! Quindi, anche se *I* fa le sue astute deduzioni, da ciò comunque non deriva alcun incentivo per lui a "disubbidire".
Se invece *I* riceve l'indicazione di giocare *T*, sa che *II* può aver ricevuto l'indicazione di giocare *L* o *R* e soprattutto deduce (è un semplice calcolo di probabilità condizionata) che la *probabilità* che a *II* sia stato detto di giocare *L* è pari a quella relativa ad *R* e quindi sono entrambe pari ad 1/2. Ma se così è, il guadagno *atteso* per *I*, se gioca *T* (cioè se "ubbidisce" alle indicazioni del mediatore) è $1/2 \cdot 6 + 1/2 \cdot 2 = 4$; se invece "disubbidisce" e gioca *L*, ha un guadagno *atteso* pari a $1/2 \cdot 7 + 1/2 \cdot 0 = 7/2$. Quindi non ha nessuna convenienza a non rispettare l'accordo.
Ecco realizzato il "miracolo" di come si possa ottenere un risultato migliore grazie ad una gestione sofisticata dell'informazione. Si noti che è nell'interesse di *entrambi i giocatori* essere informati di meno!

QUANTO ABBIAMO APPENA FINITO DI DESCRIVERE non è altro che un esempio (si potrebbe anche dire, a ragione, che sia l'esempio canonico) per illustrare l'idea di equilibrio correlato introdotto da Aumann nel 1974. Questa invenzione è uno dei "pezzi" pregiati di Aumann, in cui si saldano acutezza di analisi e rigore formale, senza però invocare tecniche matematiche sofisticate (esattamente come succede per un altro suo famosissimo contributo: *agreeing to disagree*).[2] Gli equilibri correlati non risolvono certo il problema della non unicità dell'equilibrio di Nash, visto che ogni equilibrio di Nash è *anche* un equilibrio correlato. D'altronde, il riferimento alla non unicità è utile solo per introdurre alcuni aspetti significativi di un gioco quale la *battaglia dei sessi*, ma non rappresenta il problema cui l'idea di equilibrio correlato cerca di rispondere.
Gli *equilibri correlati* hanno qualche riscontro nel mondo reale? Sì. Basti pensare ai semafori: la ragione fondamentale per cui uno "ubbidisce" di norma alla indicazione semaforica è che è conveniente ubbidire al segnale che uno riceve. In condizioni normali di guida uno non ha ragioni per non seguire le indicazioni del semaforo. E, come valutazione sociale del risultato, ne viene un guadagno in efficienza (esattamente come per la *battaglia dei sessi*). Segnalo anche un'interessante "applicazione teorica": molti modelli di apprendimento o evolutivi mostrano una convergenza "asintotica" verso equilibri correlati, che non sono necessariamente equilibri di Nash.

UN'ULTIMA ANNOTAZIONE: non è che gli equilibri correlati ci offrono una soluzione al *dilemma del prigioniero* (altro gioco molto alla moda)? No. Non c'è speranza. La coppia di strategie dominanti, corrispondenti a "confessare" da parte di entrambi i giocatori (i "prigionieri" nella storiella), non solo è l'unico equilibrio di Nash ma è anche il solo equilibrio correlato di questo gioco. Quindi, per "risolvere" il dilemma del prigioniero occorre battere altre strade. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] Per un piccolo omaggio a questo contributo di Schelling, si veda http://matematica.uni-bocconi.it/interventi/nobel2005/nobeleconomia2005fp.htm.

[2] Il link http://matematica.uni-bocconi.it/interventi/nobel2005/nobeleconomia2005fp.htm ospita anche un piccolo omaggio a questa idea così importante di Aumann.

Infine, chi fosse interessato ad una breve introduzione tecnica agli equilibri correlati, la può trovare a partire dalla mia pagina web: http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm.

Per un approfondimento, suggerisco il libro di Osborne e Rubinstein (*A Course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA, USA), 1994), ma soprattutto Myerson (*Game Theory*, Harvard Univ. Press, Cambridge (MA, USA), 1991): il suo capitolo 6, dedicato al tema della comunicazione e cooperazione, è un vero gioiello. L'origine del tutto è: R.J. Aumann: *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies* (J. Math. Econ., vol. 1, 1974, pp 67-96); ricordo che Aumann ritorna sul tema con un altro lavoro, anch'esso molto significativo, ma che qui non illustriamo: *Correlated Equilibria as an Expression of Bayesian Rationality* (Econometrica, vol. 55, 1987, pp 1-18).