Prego, dopo di lei!

di **Fioravante Patrone**

Siamo giunti al terzo appuntamento con la Teoria dei giochi. In questo articolo, Fioravante Patrone (docente all'Università di Genova) ci propone nuovi quesiti: in una situazione di sfida è meglio scegliere per primi (in modo da costringere chi "viene dopo" ad adeguarsi alla nostra mossa) oppure è meglio essere i secondi, in modo da sfruttare l'informazione derivante dalla nostra mossa? Oppure, è preferibile che le scelte siano contemporanee?

Immaginiamo una situazione molto semplice, tanto semplice da poter essere modellizzata nel modo seguente. Vi sono due individui, *I* e *II*, ciascuno dei quali può scegliere tra due alternative: *I* può scegliere tra *T* e *B*, *II* tra *L* e *R*. Nel caso generale, indicheremo con X l'insieme delle possibili scelte per *I* e con Y quello per *II*. Come si confà ad una situazione di interazione strategica, il risultato che ne deriva dipenderà dalle scelte fatte da *entrambi*. Non solo, l'apprezzamento del risultato può essere diverso da parte dei due individui.
Possiamo sintetizzare la situazione con una tabella, quale quella a sinistra di Figura 1, che descrive in modo sintetico la situazione data. Si tratta di ciò che in teoria dei giochi viene chiamato *game form* o *meccanismo*. La tabella, in effetti, non tiene conto di come i risultati siano valutati dai due individui. Le valutazioni potrebbero essere del tutto contrapposte (ciò corrisponde essenzialmente all'idea di un *gioco a somma zero*), come nella tabella al centro, oppure potrebbe esservi una completa convergenza di valutazione, come in quella di destra. In queste due tabelle (così come anche altrove, dove utile), sono utilizzati dei numeri per indicare le preferenze degli individui rispetto agli esiti. In ogni casella, il numero a sinistra riguarda il decisore *I*, mentre quello a destra riguarda il decisore *II*. Ad esempio, nella matrice di centro i numeri ci dicono che *I* preferisce c ad a, mentre vale il viceversa per *II*. Nel caso generale, il gioco sarà descritto, oltre che da X e da Y, da due funzioni (dette *payoff*) $f,g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ che descrivono le valutazioni dei risultati da parte dei due giocatori.

I \ II	L	R
T	a	b
B	c	d

I \ II	L	R
T	(-1, 1)	(1, -1)
B	(1, -1)	(-1, 1)

I \ II	L	R
T	(1, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 1)

Figura 1

Ora che abbiamo fissato gli elementi essenziali del discorso, domandiamoci: se uno ne avesse la possibilità, preferirebbe scegliere per primo, per secondo, o preferirebbe che le scelte fossero contemporanee?

Prima di dare una risposta – pur se parziale – a queste domande occorre precisare un aspetto, per evitare equivoci. Assumerò che i dati dei problemi che discuteremo siano "conoscenza comune" fra i due individui, ivi comprese le loro preferenze. Cioè, *I* e *II* conoscono i dati del problema e le preferenze di entrambi. Inoltre, *I* sa che *II* sa tutto ciò e analogamente dicasi per *II*; inoltre, *I* sa che *II* sa che *I* sa, ecc. Questa precisazione è rilevante, perché se questa condizione non è soddisfatta, una scelta fatta dall'individuo cui tocca "muovere per primo" incorpora anche una valenza di *segnale*, aggiungendo ulteriori dettagli (complicazioni?) alla situazione che vorrei analizzare.

Tornando al problema, è evidente come nel gioco descritto dalla tabella di centro (che poi rappresenta il ben noto *pari o dispari*) è del tutto conveniente essere i secondi a giocare. Invece, nel gioco *di puro coordinamento* della tabella di destra è *interesse comune* che uno scelga prima dell'altro, mentre le scelte contemporanee potrebbero portare ad un esito poco apprezzato (soprattutto se assumiamo che ai due individui non sia data la possibilità di comunicare tra loro, prima di effettuare le scelte).

Riguardo al problema generale, cosa si può dire? Intanto che la differenza essenziale fra una scelta contemporanea ed una sequenziale non sta nell'aspetto temporale, quanto nel fatto che uno non possa *osservare* la scelta fatta dall'altro in precedenza (*Certo, i viaggi nel futuro per ora non li consideriamo…*). Proprio per questo motivo, quando considererò una struttura sequenziale delle scelte, assumerò che quelle fatte possano essere osservate da chi deve scegliere dopo. Mi limiterò a considerare solo questo caso che corrisponde a ciò che, nel linguaggio tecnico della Teoria dei giochi, viene chiamato *gioco in forma estesa a informazione perfetta.*

Ebbene, si può dire qualcosa di interessante e di validità sufficientemente generale?
Il caso in cui gli interessi dei due individui coincidano ha una risposta ovvia: conviene ad entrambi avere mosse sequenziali e non ha nessuna importanza chi muova per primo. Il caso *polare*, ad interessi diametralmente opposti, si presta ad un'analisi nota da tempo. Supponiamo che giochi per primo *I*. Se *I* sceglie *T*, *II* sceglierà in modo da massimizzare il suo *payoff*, il che equivale a minimizzare quello di *I*. Quindi, per scegliere fra *T* e *B*, *I* deve guardare al minimo tra $f(T,L)$ e $f(T,R)$, da una parte, e al minimo fra $f(B,L)$ e $f(B,R)$ dall'altra. Allora, fra *T* e *B*, sceglierà l'alternativa per cui il minimo è… massimo. Insomma, siamo giunti in modo del tutto naturale a considerare il cosiddetto *valore di maxmin* del gioco dato. Discorso assolutamente analogo, se gioca *II* per primo: egli può aspettarsi di ottenere il *suo* valore di maxmin, al che corrisponde il valore di *minimax* per *I*. Ora, vi è un risultato di carattere generale (neanche difficile da dimostrare) il quale garantisce che si ha:

$$max_{x\in X}\, min_{y\in Y}\, f(x,y) \le min_{y\in Y}\, max_{x\in X}\, f(x,y)$$

e quindi, in un gioco ad interessi contrapposti, è sempre conveniente essere i secondi a giocare (non solo nel *pari o dispari*).

A questo punto, prima di fare considerazioni di carattere generale, converrà farsi una domanda: siamo sicuri del fatto che le nostre elucubrazioni corrispondano alle scelte che poi effettivamente verranno fatte dai decisori? La risposta in questo caso è abbastanza semplice ed è sostanzialmente positiva, per lo meno se assumiamo di avere di fronte i classici decisori razionali ed intelligenti di cui si occupano la Teoria delle decisioni e la Teoria dei giochi. L'osservazione, semplice ma importante, è che quando tocca muovere al secondo, egli è ormai rimasto l'unico decisore "attivo" e il suo problema è teoricamente banale: deve solo scegliere l'alternativa che preferisce. Ma a questo punto scatta un meccanismo di tipo ricorsivo (si parla di *induzione a ritroso*): colui che deve scegliere per primo, anticipa la scelta che verrà fatta dal giocatore successivo. Quindi, grazie a questa idea, di nuovo il problema si riduce a quello di fare la scelta ottimale tenendo conto di ciò che farà chi viene dopo.
Si noti come questo *meccanismo risolutore* usi in modo essenziale non solo la razionalità (e intelligenza) dei giocatori, ma il fatto che essa è *conoscenza comune* fra i giocatori. Di fatto, il meccanismo proposto non è altro che l'algoritmo introdotto da Kuhn (1953) per provare che ogni gioco finito, in forma estesa e ad informazione perfetta, ha un *equilibrio di Nash* (senza dover neanche ricorrere alle strategie miste). Possiamo anche fare un passo in avanti: quello che otteniamo con questo metodo non solo è un *equilibrio di Nash*, ma un equilibrio *perfetto nei sottogiochi*. Sto parlando di uno dei cosiddetti *raffinamenti* dell'equilibrio di Nash, per la precisione quello introdotto da Selten (1965). Abbiamo quindi una risposta ampiamente soddisfacente al problema posto inizialmente. Anzi, possiamo indicare una soluzione "generale".

Il teorema di *minimax* di von Neumann

Il primo teorema importante e tipico della Teoria dei giochi, dovuto a von Neumann, è il cosiddetto "teorema del minimax". Se abbiamo due insiemi finiti *X* ed *Y*, data $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, si ha:

$$max_{x\in X}\, min_{y\in Y}\, f(x,y) \le min_{y\in Y}\, max_{x\in X}\, f(x,y).$$

Questa disuguaglianza non è in generale una uguaglianza (vedi il gioco del pari/dispari). Lo diventa se si assume che i due individui non si limitino alle scelte possibili in *X* ed *Y*, ma utilizzino anche le cosiddette *strategie miste* (von Neumann, 1928). Questo risultato, tradotto in termini "moderni", ci permette di poter affermare che ogni gioco finito a somma zero ha un equilibrio di Nash in strategie miste (il contributo di Nash del 1950 consiste nell'estendere il risultato a giochi non a somma zero).
Quindi, se i giocatori utilizzano le strategie miste, non fa nessuna differenza giocare contemporaneamente o in sequenza. Insomma: se voi effettuate una scelta ottimale, non dovete preoccuparvi di tenerla "segreta". Potete anche comunicarla al vostro avversario. Naturalmente, questo significa anche che non potete ricavare nessun vantaggio dal comunicargliela!

Se I gioca per primo, egli otterrà $f(x_0, R_{II}(x_0))$, dove x_0 è un elemento di X che rende massimo $f(x, R_{II}(x))$ e dove $R_{II}(x)$ indica la scelta ottimale (dentro a Y) per II, tenuto conto del fatto che I ha scelto x.
Se I gioca per secondo, otterrà: $f(R_I(y_0), y_0)$, dove y_0 è un elemento di Y che rende massimo $f(R_I(y), y)$, e dove $R_I(x)$ indica la scelta ottimale (dentro a X) per I, tenuto conto del fatto che II ha scelto y
Basterà quindi, semplicemente, vedere quale dei due numeri è maggiore per capire se conviene muovere per primo o per secondo! Considerazioni analoghe valgono per II. E' chiaro che a volte un certo ordine nelle mosse conviene ad entrambi, mentre altre volte i giocatori possono avere interessi opposti in merito a questa scelta. Ad esempio, nel classico gioco della *battaglia dei sessi* (vedi tabella), gioco che mescola sia aspetti di coordinamento sia aspetti di divergenza di interessi rispetto a quale sia il risultato su cui ci si vuole coordinare, ognuno avrebbe interesse ad essere il primo a giocare.

I \ *II*	*L*	*R*
T	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

La battaglia dei sessi

Un caso significativo in cui l'ordine non ha importanza è quello in cui vi siano delle strategie fortemente dominanti (per la loro definizione, si può vedere l'articolo sul numero scorso della *Lettera*): se un giocatore ha una strategia siffatta, la giocherà sia che debba giocare per primo che per secondo, che contemporaneamente.

Chiudo con un pizzico di complicazioni finali. Non sarebbe Teoria dei giochi se non ve ne fossero. Come spesso accade, il diavolo si nasconde fra i dettagli. Le formulette scritte prima non creano problemi se le scelte dei giocatori sono univoche, ma diventano traballanti se si hanno situazioni di pareggio. Se questo accade (ad esempio, se $R_{II}(x)$ non è un *singleton* per certi x), possono spuntare guai seri e le semplici considerazioni appena fatte non sono più sufficienti. Non mi metterò certo a fare una teoria generale, ma gli esempi seguenti dovrebbero illustrare in modo piuttosto chiaro i tipi di problemi che si possono creare. Invito chi legge a creare ulteriori situazioni problematiche. ■

BIBLIOGRAFIA

Una "micro-introduzione" alla Teoria dei giochi ed altro materiale sull'argomento si possono trovare sulla mia pagina:
http://www.dima.unige.it/~patrone/divulgazione-pat.htm

Qui mi limito a dare i riferimenti bibliografici dei lavori citati, ognuno dei quali è un "classico" della teoria dei giochi.

Kuhn Harold W. [1953]: Extensive Games and the Problem of Information, in "Contributions to the Theory of Games", n. II, (curatori: H.W. Kuhn e A.W. Tucker), *Annals of Math*. Studies, **28**.

Nash John F. Jr. [1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36**, 48-49.

Von Neumann John [1928]: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Matematische Annalen*, **100**, 295-320; traduzione inglese: On the Theory of Games of Strategy, in *Contributions to the Theory of Games*, n. IV, 13-42, 1959; vedi anche *Collected Works*, vol. VI.

Selten Reinhard [1965]: Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Teil I: Bestimmung des dynamischen preisgleichgewichts; Teil II: Eigenschaften des dynamischen preisgleichgewichts, Zeitschrift für die gesamte *Staatswissenschaft*, **121**, 301-324 e 667-689.

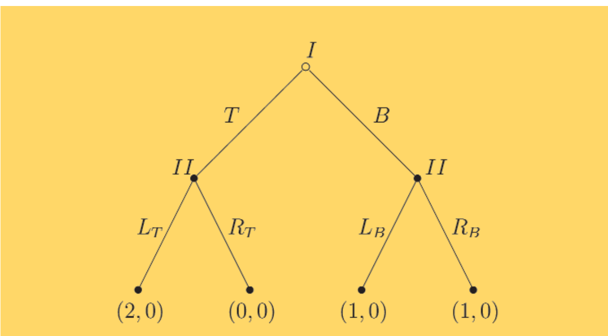

Figura 1: Siete ottimisti o pessimisti?

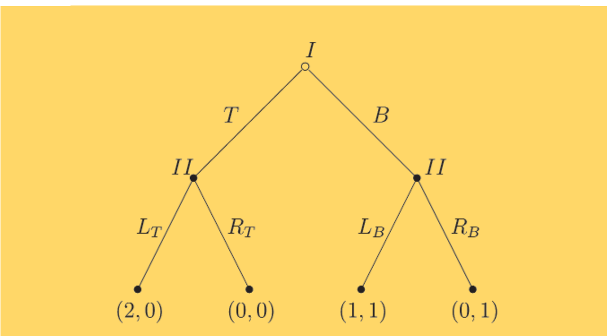

Figura 2: E qui, siete ottimisti o pessimisti?