Tagliarsi i ponti alle spalle

di **Fioravante Patrone**

Continua in questo numero della *Lettera* l'appuntamento con la Teoria dei giochi. La prima puntata (*La maledizione del vincitore*) l'autore, Fioravante Patrone, si è occupata della Teoria delle aste. In questa puntata, l'attenzione viene invece focalizzata sui *problemi di decisione in condizioni di interazione strategica*.

Si ha un problema di decisione in condizioni di *interazione* strategica quando due o più decisori possono influenzare, con le loro scelte, il risultato finale di un processo decisionale che li coinvolge. Si pensi, ad esempio, alla contrattazione in merito a una compravendita. Oppure a un'asta, tema trattato nello scorso numero della "Lettera", in cui le offerte dei partecipanti evidentemente concorrono nel determinare il risultato finale (chi vince l'asta e quanto deve pagare). Situazioni di interazione strategica possono essere modellizzate, sotto opportune condizioni, come un gioco in forma strategica (vedi il box su *Giochi, dominanza ed equilibri*).

Giochi, dominanza ed equilibri

Un gioco in *forma strategica* (a due giocatori) è (X, Y, f, g), dove X, Y sono due insiemi ed $f, g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$.
Gli elementi di X e Y rappresentano le scelte possibili, rispettivamente per il giocatore I e per II. Dato $(x, y) \in X \times Y$, il numero $f(x, y)$ rappresenta la valutazione, da parte di I, del risultato che si ottiene se I sceglie x e II sceglie y. La funzione g ha una interpretazione analoga. Le funzioni f e g vengono dette *funzioni di payoff* o, semplicemente, *payoff*. Nella consueta rappresentazione tabellare che si usa per i giochi finiti (cioè se X,Y sono insiemi finiti), in ogni casella vengono riportati a sinistra i *payoff* per I e a destra quelli per II.
Una strategia $x_1 \in X$ *domina fortemente* $x_2 \in X$ se è $f(x_1, y) > f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$. Se x_1 domina fortemente ogni $x \in X$, con $x \neq x_1$, si dice che x_1 è una strategia fortemente dominante.
Una coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice essere un *equilibrio di Nash* se:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X;$$
$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y.$$

E' immediato provare che, se x_1 è una strategia fortemente dominante per I e analogamente si ha per y_1, allora la coppia (x_1, y_1) è un equilibrio di Nash.
L'esempio più noto di gioco è il *dilemma del prigioniero*, un cui prototipo è:

I \ II	L	R
T	(2,2)	(0,3)
B	(3,0)	(1,1)

La caratteristica rilevante di questo "gioco" è che ha un equilibrio di Nash (B,R) (è addirittura in strategie fortemente dominanti), che però risulta essere inefficiente: entrambi i giocatori preferiscono il risultato che otterrebbero giocando (T,L).

In questo articolo, soffermiamo la nostra attenzione su una differenza fondamentale tra problemi di decisione *classici* (con un *unico* decisore) ed un problema di decisione in condizioni di *interazione*: in questo secondo contesto viene meno una proprietà di *monotonia* della soluzione rispetto a vari tipi di parametri.

Vediamo subito un esempio. Un problema di decisione classico può essere rappresentato, in estrema sintesi, come un problema di *massimizzazione*: il decisore ha a disposizione un insieme X che rappresenta le scelte per lui possibili in linea di principio. Tipicamente, il decisore è vincolato a effettuare le sue scelte solo in un sottoinsieme di X. La sua scelta viene effettuata sulla base di un principio di massimizzazione, dando per scontato il fatto che sia in grado di valutare le varie alternative che ha a disposizione mediante un criterio "numerico". Detto in formule, abbiamo una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ che il nostro decisore vuole massimizzare sull'insieme X_1 delle alternative disponibili ($X_1 \subseteq X$).
Ovviamente abbiamo due parametri fondamentali del nostro problema di decisione: la funzione f e l'insieme X_1. È un esercizio banale osservare che la soluzione del problema (ammesso che esista! Per togliermi d'impiccio, supporrò che X sia finito) dipende in modo monotono rispetto a questi due parametri.
Se passo da f a g ed è $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$, è chiaro che la soluzione del problema *"g"* offre un risultato migliore per il nostro decisore rispetto a quando la funzione sia f. Se indichiamo con x_f ed x_g le soluzioni del problema di decisione, rispettivamente nel caso in cui il criterio sia f o g, basta notare che:

$$f(x) \leq g(x) \leq g(x_g) \text{ per ogni } x \in X_1$$

Quindi, in particolare, sarà: $f(x_f) \leq g(x_g)$.
Analogamente, abbiamo che passando da X_1 a X_2, con $X_1 \subseteq X_2$, la situazione del nostro decisore non può che migliorare poiché:

$$f(x) \leq f(x_{X_2}) \text{ per ogni } x \in X_2,$$

e quindi, essendo anche x_{X_1} è un elemento di X_2, si ha x:.

$$f(x_{X_1}) \leq f(x_{X_2})$$

Prima di passare ai problemi con più decisori, vorrei osservare come quest'ultimo risultato – del tutto ovvio in questo contesto – possa essere collegato ad una proprietà molto interessante e molto discussa nell'ambito dei problemi di scelta: la proprietà di *Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti*, cui è dedicato un secondo box.

Indipendenza dalle alternative irrilevanti

Consideriamo una regola *c* che sceglie un elemento (per semplicità supponiamo ne venga scelto uno solo) da un insieme X, per ogni X che sta in una data classe $\mathcal{X}$ di insiemi (possiamo pensare, anche qui per semplicità, che tutti gli insiemi di questa classe data siano sottoinsiemi di un certo insieme U).
Diremo che la regola *c* soddisfa la condizione di *Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti*, abbreviata come IIA (dall'inglese: *Independence from Irrelevant Alternatives*) se si ha:

$$[X, Y \in \mathcal{X},\ X \subseteq Y,\ c(Y) \in X] \Rightarrow c(X) = c(Y)$$

E' chiaro che una regola di scelta non necessariamente soddisfa questa condizione (né, prescrittivamente, è ragionevole imporla sempre).
Basti pensare al caso in cui $Y = \{A,B,C\}$ rappresenti i candidati in una elezione a Sindaco. Si immagini che venga eletto A e che si scopra, dopo le elezioni, che il candidato C non aveva diritto a far parte dell'elettorato passivo. È evidente che, se le elezioni si fossero svolte con i soli candidati A e B, avrebbe potuto essere B il vincitore.
Non c'è spazio per discutere sui "meriti" o "demeriti" della condizione di IIA. Essa ha però un ruolo cruciale in due risultati classici: il *teorema di impossibilità* di Arrow, nella teoria delle scelte sociali e la soluzione di Nash del *problema di contrattazione*, nella teoria dei giochi.

Un caso molto importante di regola che soddisfa la condizione IIA è quello in cui è data una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ e $c(X)$ è definita come l'insieme dei punti che massimizzano f su X (sempre per semplicità, possiamo supporre che il punto di massimo sia unico). Se interpretiamo f come "funzione di utilità" ed X come "vincolo di bilancio", otteniamo l'approccio standard alla scelta del consumatore. Assumere invece *c* quale "primitiva" del problema di scelta, corrisponde all'approccio cosiddetto delle "preferenze rivelate" (introdotto da P.A. Samuelson nel 1938), ed è particolarmente interessante l'analisi di come questi due diversi approcci si possano connettere tra loro (si veda, ad esempio, Kreps – 1990).

In una situazione di *interazione* strategica, questa *monotonia* non è affatto detto che valga. Per quanto riguarda la *monotonia* rispetto alle funzioni *payoff*, basta considerare il seguente esempio:

I \ II	L	R
T	12,12	102,11
B	11,102	101,101

I \ II	L	R
T	9,9	99,10
B	10,99	100,100

Tutti gli 8 numeri nelle caselle diminuiscono, passando dalla matrice di sinistra a quella di destra. Eppure il risultato migliora! Non solo, ma tutto ciò avviene in presenza di una soluzione che non solo è *equilibrio di Nash* per il gioco, ma è anche soluzione in strategie fortemente dominanti, quindi rispetto ad un concetto di soluzione particolarmente esigente (così esigente che normalmente un gioco non ha soluzioni in strategie fortemente dominanti). Nel gioco di sinistra, l'equilibrio è (*T*,*L*) che dà un *payoff* ad *I* pari a 12; mentre nel gioco di destra, il *payoff* di equilibrio è 100 e quindi *I* è più contento (discorso del tutto analogo vale per II).
Riguardo al cambiamento nell'insieme delle strategie, possiamo considerare:

I \ II	L	C	R
T	102,102	1002,101	2,0
M	101,1002	1001,1001	1,0
B	0,2	0,1	0,0

I \ II	L	R
T	1001,1001	1,0
B	0,1	0,0

Meglio la matrice di destra, vero?
Anche qui, tra l'altro, i giochi coinvolti hanno soluzioni in strategie dominanti. A dire il vero, non c'era bisogno di utilizzare questo esempio. Basta pensare al "dilemma del prigioniero". Se si potessero togliere di mezzo le strategie fortemente dominanti *B* ed *R*, si otterrebbe un risultato migliore!
L'osservazione va ben al di là di una sorta di curiosità: si può vedere il dilemma del prigioniero come una rappresentazione stilizzata di come Hobbes analizzi il problema della nascita dello Stato nel Leviatano. Nello "stato di natura", gli uomini ottengono risultati sub-ottimali in quanto non hanno la possibilità di accordarsi sull'uso delle strategie "efficienti" *T* ed *L*. O, meglio, eventuali accordi sono instabili perché non c'è alcuna autorità in grado di farli rispettare. E' la situazione del *homo homini lupus*, dalla quale si riesce ad uscire grazie alla istituzione del "sovrano" (il quale avrà appunto l'autorità per fare rispettare gli accordi).

John Nash

Quindi, la *non monotonia* al variare delle strategie ha una rispettabile storia alle spalle. Non sempre si ha questa violazione della monotonia, ma ciò che è rilevante è che questo *può* avvenire. Cosa che non è possibile per problemi di decisione singolo.
Insomma, se uno potesse – in una situazione di interazione strategica – privarsi della possibilità di usare qualche alternativa disponibile, potrebbe risultarne avvantaggiato. Potersi tagliare i ponti alle spalle potrebbe essere meglio.
L'idea di "tagliarsi i ponti alle spalle" ha un aspetto dinamico che non viene colto nei modelli considerati. Bisogna considerare anche situazioni dinamiche. Insomma, arrivederci alla prossima puntata...

BIBLIOGRAFIA

Una «micro-introduzione» alla Teoria dei giochi ed altro materiale sull'argomento si possono trovare sulla mia pagina:

http://www.dima.unige.it/patrone/

Sulla condizione IIA, i classici sono:

Arrow, K.J. (1951): *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York; seconda edizione (con importanti correzioni): 1963; traduzione italiana: *Scelte sociali e valori individuali*, Etas libri, Milano, 1977.

Nash, J.F.Jr. (1950): *The Bargaining Problem*, Econometrica, 18, 155-162.

L'articolo classico sulle «preferenze rivelate» è:

Samuelson, P.A. (1938): *A Note on the Pure Theory of Consumers' Behavior*, Economica, NS 5, 61-71.

Per una descrizione dell'approccio mediante «regole di scelta», si può consultare:

Kreps, D.M. (1990): *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, New York; trad. italiana: *Corso di Microeconomia*, Il Mulino, Bologna, 1993.